Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 8

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2004

Abgabe 14.06.2004

Aufgabe 1
Bestimme Index und Rang der folgenden quadratischen Formen $\gamma : V \to \mathbb{R}$:

a) V sei der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n, wobei $n \geq 1$ gegeben ist, und
$$\gamma : V \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(f) := \int_0^1 f(t)f'(t)dt.$$

b) Sei $V := \mathbb{R}^n$ und
$$\gamma(x) = \sum_{i<j} x_i x_j.$$

Aufgabe 2
Untersuche, ob es für die folgenden quadratischen Formen $\gamma, \delta : V \to \mathbb{R}$ einen Automoprhismus $\varphi : V \to V$ gibt, so dass $\delta = \gamma \circ \varphi$:

a) γ aus Aufgabe 1a) und $\delta(f) := f(1)^2 + f(2)^2$.

b) $V = \mathbb{R}^4$ und
$$\gamma(x,y,z,t) = xy + zt$$
$$\delta(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Aufgabe 3

a) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $\varphi \in End(V)$ ein selbstadjungierter Operator. Beweise, dass es eine orthonormale Basis von V gibt, die aus Eigenvektoren von φ besteht.

b) Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$ eine hermitische Matrix, d.h. $\overline{A}^T = A$. Zeige, dass dann eine unitäre Matrix $Q \in SU(n)$ existiert, so dass $\overline{Q}^T AQ$ Diagonalgestalt hat.

c) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$. Bestimme explizit eine Matrix Q wie in b).

Zusatzaufgabe
Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Zwei symmetrische Matrizen $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ seien äquivalent, falls es eine Matrix $S \in Gl(n, \mathbb{K})$ gibt mit $A = S^T BS$.

Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimme alle Äquivalenzklassen in $M(2, \mathbb{F}_2)$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wissen wir aus der Vorlesung, dass $A \sim B$ genau dann wenn $rg(A) = rg(B)$ und $index(A) = index(B)$ (Trägheitssatz von Sylvester). Man überlege sich analoge Kriterien im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ sowie $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.