
Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 9

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Sommer 2004

Abgabe 21.06.2004

Aufgabe 1

Sei $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ eine Basis von V^* und Linearformen $\omega = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i$, $\eta = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i$ in V^* sowie eine 2-Form $\mu = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \sigma_i \wedge \sigma_j$ geben.

- Man berechne $\omega \wedge \eta$ und interpretiere das Ergebnis für $n = 3$ mithilfe des Vektorproduktes ($v, w \in \mathbb{R}^3 \mapsto v \times w \in \mathbb{R}^3$).
- Man berechne $\omega \wedge \mu$ und interpretiere das Ergebnis für $n = 3$ mithilfe des Standard-Skalarproduktes auf \mathbb{R}^3 .

Aufgabe 2

Ein Element α in $\Lambda^k(V^*)$ heisst *zerlegbar* wenn es Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ in V^* gibt, so dass $\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k$.

- Zeige, dass für 3-dimensionale Vektorräume V alle 2-Formen zerlegbar sind.
- Man gebe eine unzerlegbare 2-Form an, falls $\dim V = 4$.

Aufgabe 3

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Zeige dass die k Linearformen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V^*$ linear abhängig sind genau dann wenn $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k = 0$.

Zusatzaufgabe

Man zeige, dass jede $(n-1)$ -Form auf einem n -dimensionalen Vektorraum V zerlegbar ist. Genauer: Sei μ eine von null verschiedene $(n-1)$ -Form.

- Zeige dass $W^\mu = \{\alpha \in V^* \mid \alpha \wedge \mu = 0\}$ ein $(n-1)$ -dimensionaler Untervektorraum von V^* ist.
- Sei $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ eine Basis von W^μ . Zeige, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\mu = c\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1}.$$

Hinweis: Vergleichen Sie W^μ mit $W^{\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1}}$. Dabei helfen auch die obigen Aufgaben.