Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 10

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2004

Abgabe 28.06.2004

Aufgabe 1

a) Sei $\{e^1, \ldots, e^n\}$ eine Basis von V^* und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$ mit $\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e^i$. Beweise für die Koeffizienten der Basisdarstellung $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1, \ldots, i_k} \, e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$ die Formel

$$a_{i_1, \ldots, i_k} = \det \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k 1} & \cdots & a_{i_k k} \end{pmatrix}$$

b) Seien $\beta_1, \ldots, \beta_k \in V^*$ mit $\beta_i = \sum_j t_{ji} \alpha_j$. Dann gilt

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k = \det(t_{ji}) \, \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$$

c) Seien $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$, $\{\beta_i\}_{i=1}^k$ jeweils linear unabhängige Teilmengen von V^*. Zeige:

$$span\{\alpha_i\}_{i=1}^k = span\{\beta_i\}_{i=1}^k \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k = \lambda \cdot \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k$$

für ein $\lambda \neq 0$.

Aufgabe 2

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, $\{e_1, \ldots e_n\}$ eine ON-Basis von V, sowie $\{e^1, \ldots e^n\}$ die zugehörige duale Basis in V^*. Ferner bezeichne $* : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{n-k}(V^*)$ den Hodge-$*$-Operator.

a) Für $n = 3$ berechne man $*(a_1 e^1 + a_2 e^2 + a_3 e^3)$, $*(a_1 e^2 \wedge e^3 + a_2 e^3 \wedge e^1 + a_3 e^1 \wedge e^2)$ und $*(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3)$.

b) Für $n = 4k$ ist $* : \Lambda^{2k}(V^*) \to: \Lambda^{2k}(V^*)$ ein Isomorphismus mit $*^2 = id$. Zeige, dass dieser nur die Eigenwerte ± 1 besitzt und diagonalisierbar ist, d.h. $\Lambda^{2k}(V^*) = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$ mit $\Lambda_\pm = \{\omega \in \Lambda^{2k}(V^*) \mid *\,\omega = \pm\omega\}$. Bestimme für $n = 4$ explizite Basen von $\Lambda_\pm$.

Aufgabe 3

a) Sei $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ eine beliebige 2-Form. Zeige, dass eine Basis $\{e^1, \ldots, e^n\}$ in V^* existiert, so dass $\omega = e^1 \wedge e^2 + \ldots + e^{2r-1} \wedge e^{2r}$. Hinweis: Man zeige, dass es eine Basis $(v_1, v_2, ..., v_{2r-1}, v_{2r}, ...v_n)$ gibt, so dass $\omega(v_i, v_j) = 0$ außer für $\omega(v_{2i-1}, v_{2i}) = -\omega(v_{2i}, v_{2i-1}) = 1$ für $i = 1, ..., r$. Wie gewinnt man aus einer solchen Basis ω?

b) Zeige, dass die Zahl r in a) charakterisiert ist durch $\omega^r \neq 0$ und $\omega^{r+1} = 0$, wobei $\omega^k := \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{k-mal}$.

Zusatzaufgabe

a) Sei $\alpha \in \Lambda^1(V^*)$ eine 1-Form. Dann gilt $\langle \alpha \wedge \omega, \eta \rangle = \langle \omega, x_\alpha \lrcorner \eta \rangle$ für Formen $\omega \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta \in \Lambda^{k+1}(V^*)$, wobei x_α gegeben ist durch $\alpha(y) = \langle x_\alpha, y \rangle$.

b) Für $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ betrachte man die lineare Abbildung $\omega\wedge : \Lambda^l(V^*) \to \Lambda^{k+l}(V^*)$. Für die adjungierte Abbildung $(\omega\wedge)^* : \Lambda^{k+l}(V^*) \to \Lambda^l(V^*)$ zeige man $(\omega\wedge)^* = \pm * (\omega\wedge)*$.