
Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 11

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Sommer 2004

Abgabe 05.07.2004

Aufgabe 1

- Zeige, dass eine orientierungserhaltende Bewegung der euklidischen Ebene entweder eine Drehung um einen Punkt der Ebene oder eine Translation ist.
- Konstruiere eine Bewegung der Euklidischen Ebene, die keine Translation ist und keinen Fixpunkt hat.
- Begründe, dass die Bewegung

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine Drehung ist und bestimme das Drehzentrum, sowie den Drehwinkel.

- (freiwillig) Zeige, dass jede euklidische Bewegung der Ebene von der Art in a) bzw. b) ist. Stelle eine entsprechende Liste für den 3-dimensionalen euklidischen Raum auf (Hinweis: Hierfür ist es ganz nützlich zu wissen, dass für jede orthogonale Matrix $A \in O(n)$ der Kern $\text{Ker}(A - E_n)$ senkrecht auf dem Bild $\text{Im}(A - E_n)$ steht. Warum ist das so?)

Aufgabe 2

Zeige die Behauptung aus der Vorlesung, dass jede abstandserhaltende Abbildung φ der Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ die Einschränkung einer orthogonalen Abbildung ist, d.h. es gibt ein $\Phi \in O(n)$ mit $\Phi|_{S^{n-1}} = \varphi$. (Hinweis: Wie muss die Abbildung Φ aussehen, damit sie eine lineare Fortsetzung von φ sein kann? Stelle eine Vermutung auf und zeige für diese die Behauptung.)

Aufgabe 3

Welcher Typ von Quadrik wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0?$$

Bestimme die Brennpunkte. Skizziere die Kurve im (x, y) -Koordinatensystem.

Zusatzaufgabe

Man gebe einen mathematischen Beweis für die in der Vorlesung physikalisch motivierte Tatsache an, dass ein Lichtstrahl durch einen Brennpunkt der Ellipse in einen Lichtstrahl reflektiert wird, der durch den anderen Brennpunkt geht.

Hinweis: Der Satz über implizite Funktionen darf verwendet werden. Man kann den Sachverhalt aber auch algebraisch beweisen. Welchen Vorteil bietet die (etwas aufwändigere) zweite Variante aus algebraischer Sicht?