Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 12

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2004

Abgabe 14.07.2004

Aufgabe 1
Berechne die Normalform der Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^4$, die durch die folgende Gleichung gegeben ist

$$2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 4x_3x_4 + 3x_4^2 + x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4 = 0$$

und bestimme die zugehörige Transformation $T(x) = Bx + q$ mit $B \in M(4; \mathbb{R})$ und $q \in \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 2
Welcher Typ einer ebenen Quadrik wird durch den Schnitt der Ebene $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$ mit dem Kegel $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3^2 = x_1^2 + x_2^2\}$ gegeben. Bestimme die euklidische Normalform. Wo genau befinden sich die Brennpunkte dieser Quadrik im $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3
Welche der folgenden Flächen in $\mathbb{R}^3$ sind Quadriken und von welchem Typ sind sie? Begründe die gegebenen Antworten.

a) $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3 + 2x_2^2x_3 + x_3^2 = 0\}$;

b) die Fläche, die man aus der der ebenen Quadrik $\{(x_1x_2, 0) \mid x_1x_2 - 1 = 0\}$ durch Rotation um die x–Achse erhält;

c) die Fläche, die man aus der der ebenen Quadrik $\{(x_1x_2, 0) \mid x_1x_2 - 1 = 0\}$ durch Rotation um die Achse $\{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ erhält;

d) die Fläche, die man aus der der ebenen Quadrik $\{(x_1x_2, 0) \mid x_1x_2 - 1 = 0\}$ durch Rotation um die Achse $\{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ erhält.

Zusatzaufgabe
Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^n$ und $H \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum.

a) Zeige, dass der Durchschnitt $H \cap Q$ eine Quadrik in H ist.

b) Sei $p \in P \cap H$ ein regulärer Punkt sowohl von Q als auch von $Q \cap H$. Beschreibe die Tangente (und den Tangentialraum) an $Q \cap H$ in p mithilfe der Tangente an Q in p.

c) Sei $H = H_p$, die Tangente in p an Q. Kann dann p ein regulärer Punkt von $Q \cap H$ sein?