Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik

Klausur

Lineare Algebra und analytische Geometrie II - SS 2004

10.07.2004

Name:

Matrikelnummer:

	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
$\sum$	

Bitte lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt und beschriften Sie dieses mit Ihrem Namen und der Aufgabennummer.

Fakten aus der Vorlesung und nichtgelöste Teilaufgaben der Klausur dürfen - unter Angabe - verwendet werden. Ergebnisse ohne erkennbaren Lösungswege können leider nicht gewertet werden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

Gegeben seien die Matrizen $A, B \in M(3, \mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechne die charakteristischen Polynome von A und B (ganzzahlige Eigenwerte).

b) Bestimme die reelle Jordansche Normalform von A und eine Jordan-Basis.

c) Gibt es eine Matrix $T \in M(3, \mathbb{R})$ mit $T^{-1}AT = B$? Begründe die Antwort!

Aufgabe 2

a) Sei V ein Vektorraum mit Basis $\{b_i\}$ und dazu dualer Basis $\{b^i\}$ in V^*. Zeige:

$$v = \sum_{i=1}^{n} b^i(v)\, b_i, \text{ für } v \in V, \qquad w = \sum_{i=1}^{n} w(b_i)\, b^i \text{ für } w \in V^*$$

b) Betrachte die folgende Basis B des Vektorraums $V = M(2, R)$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Linearform $tr : V \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$tr \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22}$$

Berechne die Koordinaten von tr bezüglich der dualen Basis B^*.

Aufgabe 3

a) Zeige, dass $f(x,y) = x^T A y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ definiert.

b) Berechne das orthogonale Komplement (bzgl. f) von $x = (1,0,0)^T \in \mathbb{R}^3$ und gebe eine Orthonormalbasis dafür an.

Aufgabe 4

a) Sei f eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ mit $f(e_i, e_j) > 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Ist dann f notwendig positiv definit? Begründe die Antwort!

b) Sei f eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ und $U \subset \mathbb{R}^3$ ein 2-dimensionaler Unterraum mit $f(u,v) = 0$ für alle $u, v \in U$. Kann f nicht ausgeartet sein? Begründe die Antwort!

c) Begründe, dass folgende Aussagen für eine symmetrische Matrix $A \in M(n, \mathbb{R})$ äquivalent sind:

(i) $f(x,y) = x^T A y$ ist ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$.

(ii) A hat nur positive Eigenwerte.

Aufgabe 5

Bestimme die Euklidische Normalform der Quadrik $P(x,y) = 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$ und skizziere sie sowie ihre Lage im $\mathbb{R}^2$.