Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik

Probeklausur-Lösungsvorschläge

Lineare Algebra und analytische Geometrie II - SS 2004

Aufgabe 1

Für das charakteristische Polynom erhält man $\chi_A(t) = t^3$, d.h. der einzige Eigenwert ist 0 und A ist nilpotent, denn nach Cayley-Hamilton gilt $\chi_A(A) = A^3 = 0$. Nun berechnet man, dass $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, d.h. das Minimalpolynom von A ist ebenfalls $m_A(t) = t^3$ und die Jordansche Normalform von A hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung einer Jordanbasis wählt man ein $b_3 \in ker(A^3) \setminus ker(A^2)$, z.B. $b_3 := (1,0,0)^T$. Mit $b_2 := Ab_3 = (-4,-6,-2)^T$ und $b_1 := A^2 b_3 = (-2,-4,0)^T$ ist dann $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Jordanbasis.

Aufgabe 2

a) Es gilt $f(p,p) = \int_0^1 p(x)^2\,dx \geq 0$ und $f(p,p) = 0 \;\Leftrightarrow\; p(x) = 0, \forall x \in [0,1]$. D.h. $p = 0$ (ein Polynom $p \neq 0$ hat nur endlich viele Nullstellen) und f ist positiv definit. Ferner ist f offensichtlich symmetrisch, mithin ein Skalarprodukt.

b) φ ist linear, denn $\varphi(a \cdot p + b \cdot q) = a \cdot p(1) + b \cdot q(1) = a \cdot \varphi(p) + b \cdot \varphi(q)$, für $p, q \in V$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

c) $\varphi = a_0 1^* + a_1 x^* + a_2 (x^2)^*$ und $a_0 = \varphi(1) = 1$, $a_1 = \varphi(x) = 1$, $a_2 = \varphi(x^2) = 1$.

d) Wir machen den Ansatz $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Dann muss gelten:

$$1 = \varphi(1) = f(q,1) = \int_0^1 q(x)\,dx = \Big[a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_1}{3}x^3\Big]_0^1 = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{3}$$
$$1 = \varphi(x) = f(q,x) = \int_0^1 q(x)x\,dx = \Big[\frac{a_0}{2}x^2 + \frac{a_1}{3}x^3 + \frac{a_1}{4}x^4\Big]_0^1 = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_1}{4}$$
$$1 = \varphi(x^2) = f(q,x^2) = \int_0^1 q(x)x^2\,dx = \Big[\frac{a_0}{3}x^3 + \frac{a_1}{4}x^4 + \frac{a_1}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_1}{5}$$

also

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nach Gauss-Algorithmus erhält man $(a_0, a_1, a_2) = (3, -24, 30)$, d.h. $q(x) = 3 - 24x + 30x^2$.

Aufgabe 3

a) Das E linear ist, ist offensichtlich. Die Bilinearität von Var wird aus b) ersichtlich.

b) Ausmultiplizieren ergibt:

$$\begin{aligned} n \cdot Var(x) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 = \sum_{i=1}^{n} ({x_i}^2 - 2x_i E(x) + E(x)^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2nE(x)^2 + nE(x)^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - nE(x)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i,j} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{n}) {x_i}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} x_i x_j \end{aligned}$$

also ist Var eine quadratische Form und die Gramsche Matrix kann man direkt ablesen:

$$G_S(Var) = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} n-1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n-1 \end{pmatrix}$$

c) Nach Definition gilt $Var(x) \geq 0$ und $Var(x) = 0$ genau dann wenn $x_i = E(x), \forall i$, d.h. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Also ist Var semi-definit.

Aufgabe 4

a) Wir wenden das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf die Basis $\{b_1, e_2, e_3, e_4\}$ an:

$$b_2 = e_2 - \frac{\langle b_1, e_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um Brüche zu vermeiden, skalieren wir b_2, d.h. multiplizieren mit -4.

$$b_3 = e_3 - \frac{\langle b_1, e_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, e_3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren noch mit -3.

$$b_4 = e_4 - \frac{\langle b_1, e_4 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, e_4 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 - \frac{\langle b_3, e_4 \rangle}{\langle b_3, b_3 \rangle} b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D.h. als Orthogonalbasis erhalten wir

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Es gilt $e_1 = pr_{{b_1}^\perp}(e_1) + pr_{b_1}(e_1)$, d.h.

$$pr_{{b_1}^\perp}(e_1) = e_1 - pr_{b_1}(e_1) = e_1 - \frac{\langle b_1, e_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

a) Die symmetrischen Bilinearformen f, g findet man entweder über die Polarisierung-Formel

$$f(x,y) = Q_f(x+y) - Q_f(x) - Q_f(y)$$

oder man liest direkt die Gramschen Matrizen ab:

$$G_S(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad G_S(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Hauptminore von $G_S(f)$ gilt $D_1 = 1 > 0$, $D_2 = 2 > 0$, also ist f positiv nach dem Hurwitz-Kriterium (Aufgabe 2, Blatt 5).

b) Aus der geforderten Gleichung folgt:

$$G_S(g) = G_S(f) \cdot M_S(\Phi) \quad \Rightarrow \quad M_S(\Phi) = G_S(f)^{-1} \cdot G_S(g)$$

Bemmerke, dass $G_S(f)$ invertierbar ist, weil f ein Skalarprodukt ist. Also:

$$M_S(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Ferner ist Φ symmetrisch, denn unter Verwendung der Symmetrie von f und g folgt:

$$f(\Phi^*(x), y) = f(x, \Phi(y)) = g(x,y) = g(y,x) = f(y, \Phi(x)) = f(\Phi(x), y) \quad \Rightarrow \quad \Phi = \Phi^*$$

Bemerkung: Φ ist ein symmetrischer Endomorphismus, obwohl $M_S(\Phi)$ keine symmetrische Matrix ist. Das liegt daran, dass S keine ONB ist bezüglich f.

c) Nach dem Spektralsatz exisitiert eine ONB bezüglich f aus Eigenvektoren von Φ: Die Eigenwerte von Φ sind $\{1, -\frac{3}{2}\}$ und die zugehörigen Eigenvektoren sind $b_1' = (1,0)^T$, $b_2' = (2,-1)^T$. Um eine ONB zu erhalten, müssen wir noch normieren (bezüglich f !):

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{f(b_1', b_1')}} b_1' = (1,0)^T, \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{f(b_2', b_2')}} b_2' = \frac{1}{\sqrt{(2)}}(2,-1)$$

Es gilt also $f(b_i, b_j) = \delta_{ij}$ und $\Phi(b_i) = \lambda_i$. Daraus folgt $g(b_i, b_j) = f(b_i, \Phi(b_j)) = \lambda_j \delta_{ij}$, d.h. die Basis $\{b_1, b_2\}$ ist orthonormal bezüglich f und orthogonal bezüglich g.

Aufgabe 6

(0) Bringe $P(x,y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2 - 12x + 34y + 16 = 0$ in die Form

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2a^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -6 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 16 \end{aligned}$$

(1) Diagonalisiere A mittels Hauptachsentransformation, d.h. finde eine Matrix $H \in O(2)$ mit $H^T A H = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$. Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A(t) = t^2 - 25t + 100 = (t-20)(t-5)$. Die normierten Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\{20, 5\}$ sind $\frac{1}{\sqrt{(5)}}(1,-2)^T$ und $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$, also:

$$(P \circ H)(x,y) = P_H(x,y) = 20x^2 + 5y^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}(-40x + 5y) + 16$$

mit

$$H = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in O(2)$$

(2) Eliminiere die linearen Terme durch eine Translation T_v, $v \in \mathbb{R}^2$ (quadratische Ergänzung):

$$
\begin{aligned}
&20x^2 + 5y^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}(-40x + 5y) + 16 = \\
&= 20\Big(x^2 - 2x\frac{2}{\sqrt{5}} + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\Big) + 5\Big(y^2 + 2y\frac{1}{\sqrt{5}} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\Big) - 20\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 16 \\
&= 20\Big(x - \frac{2}{\sqrt{5}}\Big)^2 + 5\Big(y + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^2 - 1
\end{aligned}
$$

Mit $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$ folgt also:

$$(P_H)_{T_v} = (P_H \circ T_v)(x, y) = 20x^2 + 5y^2 - 1$$

d.h. ${(P_H)_{T_v}}^{-1}(0)$ ist eine Ellipse mit Halbachsen $a = \frac{1}{\sqrt{20}}$ und $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(3) Es gilt $P^{-1}(0) = (H \circ T_v)((P_H)_{T_v})^{-1}(0) = (T_{Hv} \circ H)((P_H)_{T_v})^{-1}(0)$. Also ist $P^{-1}(0)$ eine um H gedrehte Ellipse mit Mittelpunkt in $Hv = (0, -1)^T$.