

Probeklausur

Lineare Algebra und analytische Geometrie II - SS 2004

30.06.2004

Aufgabe 1

Berechne die Jordansche Normalform sowie eine Jordan Basis für die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Betrachte den Vektorraum $V = \text{Pol}_2$ der Polynome vom Grad ≤ 2 versehen mit der Bilinearform

$$f(p, q) := \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

Ferner sei $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung $\varphi(p) := p(1)$.

- Zeige, dass f positiv-definit ist, d.h. ein Skalarprodukt definiert.
- Zeige, dass $\varphi \in V^*$.
- Sei $B = \{1, x, x^2\}$ die Standardbasis von V . Berechne die Koordinaten von φ bezüglich der dualen Basis B^* in V^* .
- Finde ein Polynom $q \in V$ mit $\varphi(p) = f(q, p)$, $\forall p \in V$. Ist q dadurch eindeutig bestimmt?

Aufgabe 3

Betrachte die Funktionen $E, \text{Var} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$E(x) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \quad (\text{Mittelwert})$$
$$\text{Var}(x) = E((x_1 - E(x))^2, \dots, (x_n - E(x))^2), \quad (\text{Varianz})$$

- Zeige, dass E eine Linearform und Var eine quadratische Form auf \mathbb{R}^n ist.
- Berechne die Gramsche Matrix von Var bezüglich der Standardbasis des \mathbb{R}^n .
- Ist Var positiv definit?

Aufgabe 4

- a) Ergänze $b_1 = (1, 1, 1, 1)^T \in \mathbb{R}^4$ zu einer orthogonalen Basis des \mathbb{R}^4 versehen mit dem Standardskalarprodukt.
- b) Bestimme die orthogonale Projektion des Vektors $(1, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ auf $\text{span}\{b_1\}^\perp$.

Aufgabe 5

Betrachte auf \mathbb{R}^2 die beiden quadratischen Formen

$$Q_f(x) = x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_1x_2, \quad Q_g(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$$

- a) Finde symmetrische Bilinearformen f, g mit $f(x, x) = Q_f(x)$, $g(x, x) = Q_g(x)$ und bestimme deren Gramsche Matrizen bezüglich der Standardbasis im \mathbb{R}^2 . Zeige, dass f ein Skalarprodukt ist.
- b) Bestimme eine Abbildung $\Phi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ mit $g(x, y) = f(x, \Phi(y))$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ und zeige, dass Φ symmetrisch ist bezüglich f , also $\Phi^* = \Phi$.
- c) Bestimme eine Basis $\{b_1, b_2\}$ des \mathbb{R}^2 , die **orthonormal** ist bezüglich f und **orthogonal** bezüglich g .

Aufgabe 6

Bestimme den Typ des folgenden Kegelschnitts im \mathbb{R}^2 und skizziere ihn

$$8x^2 - 12xy + 17y^2 - 12x + 34y + 16 = 0$$