Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik

Probeklausur

Lineare Algebra und analytische Geometrie II - SS 2004

30.06.2004

Aufgabe 1
Berechne die Jordansche Normalform sowie eine Jordan Basis für die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2
Betrachte den Vektorraum $V = Pol_2$ der Polynome vom Grad ≤ 2 versehen mit der Bilinearform

$$f(p,q) := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

Ferner sei $\varphi : V \to \mathbb{R}$ die Abbildung $\varphi(p) := p(1)$.

a) Zeige, dass f positiv-definit ist, d.h. ein Skalarprodukt definiert.

b) Zeige, dass $\varphi \in V^*$.

c) Sei $B = \{1, x, x^2\}$ die Standardbasis von V. Berechne die Koordinaten von φ bezüglich der dualen Basis B^* in V^*.

d) Finde ein Polynom $q \in V$ mit $\varphi(p) = f(q,p)$, $\forall p \in V$. Ist q dadurch eindeutig bestimmt?

Aufgabe 3
Betrachte die Funktionen $E, Var : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n),\ x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n && \text{(Mittelwert)} \\ Var(x) &= E\big((x_1 - E(x))^2, \ldots, (x_n - E(x))^2\big), && \text{(Varianz)} \end{aligned}$$

a) Zeige, dass E eine Linearform und Var eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Berechne die Gramsche Matrix von Var bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

c) Ist Var positiv definit?

Aufgabe 4

a) Ergänze $b_1 = (1,1,1,1)^T \in \mathbb{R}^4$ zu einer orthogonalen Basis des $\mathbb{R}^4$ versehen mit dem Standardskalarprodukt.

b) Bestimme die orthogonale Projektion des Vektors $(1,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$ auf $span\{b_1\}^{\perp}$.

Aufgabe 5
Betrachte auf $\mathbb{R}^2$ die beiden quadratischen Formen

$$Q_f(x) = x_1{}^2 + 6x_2{}^2 + 4x_1x_2, \qquad Q_g(x) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 4x_1x_2$$

a) Finde symmetrische Bilinearformen f, g mit $f(x,x) = Q_f(x)$, $g(x,x) = Q_g(x)$ und bestimmme deren Gramsche Matrizen bezüglich der Standardbasis im $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass f ein Skalarprodukt ist.

b) Bestimme eine Abbildung $\Phi \in End(\mathbb{R}^2)$ mit $g(x,y) = f(x, \Phi(y))$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ und zeige, dass Φ symmetrisch ist bezüglich f, also $\Phi^* = \Phi$.

c) Bestimme eine Basis $\{b_1, b_2\}$ des $\mathbb{R}^2$, die ortho**normal** ist bezüglich f und ortho**gonal** bezüglich g.

Aufgabe 6
Bestimme den Typ des folgenden Kegelschnitts im $\mathbb{R}^2$ und skizziere ihn

$$8x^2 - 12xy + 17y^2 - 12x + 34y + 16 = 0$$