Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I WS 2010/11

Abgabe: 15.11.2010, Besprechung: 15.11.-18.11., Test: 22.11.-25.11.

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B, C die folgende Identität: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

b) Zeigen Sie, dass für die Komplemente beliebiger Teilmengen $A, B \subseteq U$ gilt: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (De Morgans Gesetz).

Aufgabe 2

a) Geben Sie die Multiplikations - und Additionstafeln für $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ an.

b) Bestimmen Sie die letzte Ziffer von

$$\left(2^{2010} + 9^{2010}\right)^{2010}.$$

Aufgabe 3
Seien $a, m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ zwei teilerfremde natürliche Zahlen, d.h. es gibt keine natürliche Zahl größer als 1, durch die beide Zahlen teilbar sind.
Zeigen Sie: es gibt eine natürliche Zahl k, $1 \leq k \leq m-1$, für die a^k bei Division durch m den Rest 1 lässt (man schreibt dafür $a^k \equiv 1 \mod m$).
Verwenden Sie das "Schubfachprinzip" (siehe z.B. Wikipedia) und keine anderen Sätze aus der Zahlentheorie, wie den Satz von Euler oder den kleinen Satz von Fermat.

Aufgabe 4
Untersuchen Sie, ob für beliebige endliche Mengen M die folgenden Relationen, R_i, $i \in \{1; 2; 3; 4\}$ auf der Potenzmenge, $\mathcal{P}(M)$, reflexiv oder transitiv sind. Welche sind Äquivalenzrelationen, welche Ordnungsrelationen: Seien $A, B \subset M$ Teilmengen:

i) $AR_1B :\Leftrightarrow A \subseteq B$

ii) $AR_2B :\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

iii) $AR_3B :\Leftrightarrow \sharp(A) \leq \sharp(B)$

iv) $AR_4B :\Leftrightarrow \sharp(A) = \sharp(B)$.

$\sharp(A)$ bezeichne die Anzahl der Elemente in $A \subset M$