Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I WS 2010/11

Abgabe: 22.11.2010, Besprechung: 22.11.-25.11., Test: 29.11.-2.12.

Aufgabe 1 a) Bestimmen Sie alle möglichen Verknüpfungen der folgenden Abbildungen:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \quad f_1(x) = (\sin x, \cos x),$$
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f_2(x,y) := x^2 + y^2,$$
$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \quad f_3(x,y) = (x^2, y^2, xy).$$

b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen g_1 und g_2. Welche der Abbildungen ist injektiv, welche surjektiv und bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie für die bijektive Abbildung die Umkehrabbildung:

$$g_1 : \mathbb{R} \to (-1,1); \quad g_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g_2(x) = x^3 - x.$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie für folgende Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Mengen A_i, B_i $(i = 1,2,3)$ die Bildmengen $f_i(A_i)$ sowie die Urbildmengen ${f_i}^{-1}(B_i)$.

1. $f_1(x) = x + 3$, $A_1 = \{1; 2; 5\}$, $B_1 = (-1, 3)$,

2. $f_2(x) = x^2 - 1$, $A_2 = (-1, 1)$, $B_2 = \{-1; 0\}$,

3. $f_3(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$ eine Konstante), $A_3 = \{0\} \cup (1, 2)$, $B_3 = \{a\}$.

Aufgabe 3 Sei $f : A \to B$ eine Abbildung, und seien $A_1, A_2 \subseteq A$ Beweisen Sie, dass

$$f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2).$$

Zeigen Sie die Gleichheit, falls f injektiv ist. Geben Sie ein Beispiel einer Abbildung f an, für die die Gleichheit nicht gilt.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen bzw. Gleichungssysteme:

a) $4x = 1$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$,

b) $x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,

c) $2x + 3y = 1$ und $-x + 4y = 2$ in $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Hinweis: Die Mengen der in Frage kommenden Lösungen sind endlich!