

Übungsblatt 5

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I WS 2010/11

Abgabe: 29.11.2010, Besprechung: 29.11.-2.12., Test: 6.12.-9.12.

Aufgabe 1. Seien $g_1 : A \rightarrow B$ und $g_2 : B \rightarrow C$ Abbildungen. Beweisen Sie

- a) $g_2 \circ g_1$ injektiv $\Rightarrow g_1$ injektiv,
b) $g_2 \circ g_1$ surjektiv $\Rightarrow g_2$ surjektiv,
c) in a) folgt im Allgemeinen nicht, dass g_2 injektiv ist und in b) folgt im Allgemeinen nicht, dass g_1 surjektiv ist.
(Hinweis: Finden Sie Gegenbeispiele.)

Aufgabe 2. Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen m, n die Identität

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

Aufgabe 3. Gegeben sei $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{a) } (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \quad \text{b) } 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus Aufgabe 2 für alle $n \geq 1$ und $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Aufgabe 4

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- (1) Formulieren Sie die Bedingung, dass f nicht injektiv ist.
(2) Formulieren Sie die Bedingung, dass f nicht surjektiv ist.

Sei $R \subset M \times M$ eine Relation.

- (4) Formulieren Sie die Bedingung, dass R nicht reflexiv ist.
(5) Formulieren Sie die Bedingung, dass R nicht symmetrisch ist.
(6) Formulieren Sie die Bedingung, dass R nicht transitiv ist.

Sei $G \subset X \times X$ der Graph einer Abbildung $f : X \rightarrow X$. Diese fassen wir nun als Relation auf. Beschreiben Sie die folgenden Bedingungen an G mithilfe der Abbildung f :

- (7) G ist reflexiv.
(8) G ist symmetrisch.
(9) G ist transitiv.
(10) Finden Sie jeweils ein Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deren Graph eine Relation auf \mathbb{R} definiert, die reflexiv ist, die symmetrisch aber nicht reflexiv ist, bzw. die transitiv aber nicht symmetrisch ist.

Aufgabe 5

Betrachten Sie die folgende Behauptung:

Für jedes Paar, (a, b) natürlicher Zahlen gilt: $a^2 + b^2$ ist genau dann durch 3 teilbar, wenn a und b durch drei teilbar sind.

- (1) Welche Aussagen werden hier verknüpft?
- (2) Welcher Art ist die Verknüpfung?
- (3) Zerlegen Sie die Behauptung in zwei Teilaussagen!
- (4) Welche dieser Teilaussagen ist leichter zu überprüfen?
- (5) Mit welcher Strategie wollen Sie die schwerere Teilaussage beweisen (direkter oder indirekter Beweis)?
- (6) Beweisen Sie beide Teilaussagen und damit die Behauptung!