Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 7

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I WS 2009/10

Abgabe: 13.12.2010, Besprechung: 13.12.-16.12., Test: 3.1.-6.1.

Aufgabe 1.
(a) Welche der Gruppen, die Sie in der Vorlesung kennegelernt haben, enthalten genau drei Elemente? Bestimmen Sie alle solche Gruppen durch Aufstellen der Gruppentafel.
(Hinweis: Zwei endliche Gruppen werden als gleich angesehen, wenn ihre Grupppentafeln bis auf Umbenennung der Elemente übereinstimmen.)
(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}, \cdot)$ (das heißt die Restklassen modulo 5 ohne $[0]$, mit der Multiplikation) eine Gruppe bildet! Stellen Sie die Verknüpfungstabelle auf. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Verknüpfungstabelle der Addition $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 2.
Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen mit der jeweils angegeben Verknüpfung, welche der Axiome für Gruppen (inklusive der Kommutativität) von diesen erfüllt werden. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Welche der drei Beispiele definieren Gruppen?

(a) $(\mathbb{N}_0, \circ)$, wobei $x \circ y := |x - y|$ und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

(b) $(\mathbb{R}, \cdot)$

(c) $((-1, 1), \circ)$, wobei $x \circ y := \frac{x+y}{1+xy}$

Hinweis: (1) Die aus der Schule bekannten Gesetze der Addition bzw. Multiplikation auf den Zahlbereichen dürfen Sie verwenden.
(2) $(-1, 1)$ bezeichnet das offene Intervall in $\mathbb{R}$ mit den Grenzen -1 und 1.

Aufgabe 3. (1) Entscheiden Sie für die jeweils angegebene Gruppe $(G, \circ)$, ob es sich bei den Teilmengen $U \subset G$ um Untergruppen handelt. Begründen Sie ihre Entscheidung.

(a) $(G, \circ) = (\mathbb{Z}, +)$, $U = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$.

(b) $(G, \circ) = (\mathbb{Z}, +)$, $n \in \mathbb{N}$, $U = n\mathbb{Z}$.

(c) $(G, \circ) = (\mathbb{R}, +)$, $U = \mathbb{Q}$.

(2) Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen um Gruppenhomomorphismen handelt. Begründen Sie ihre Entscheidung.

(a) $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $x \mapsto e^x$, wobei $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) $(\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $x \mapsto |x|$.

(f) $(\mathbb{Z}, +) \to (\{-1; 1\}, \cdot)$, $x \mapsto (-1)^x$.

Bitte wenden...

Aufgabe 4.
(a) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$. (Hinweis: Es gibt insgesamt vier.)
(b) Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ (Hinweis: Es gibt genau drei.)