

Übungsblatt 8

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I WS 2009/10

Abgabe: 3.1.2011, Besprechung: 3.1.-6.1., Test: 10.1.-13.1.

FUNQZXHZAEZXDJJCCO

Aufgabe 1. Untersuchen Sie folgende Ausdrücke in S_n :

- (a) Zeigen Sie: $(1\ 2\ \dots\ (n-1)\ n)^{n-1} = (1\ 2\ \dots\ (n-1)\ n)^{-1} = (n\ (n-1)\ \dots\ 2\ 1)$
- (b) Berechnen Sie: $(n\ (n-1)\ \dots\ 2\ 1)\ (1\ 2)\ (1\ 2\ 3\ \dots\ n)$
- (c) Berechnen Sie: $(1\ n)\ (1\ 2\ 3\ \dots\ n)$

Aufgabe 2. Beweisen Sie induktiv, dass S_n von $(1\ 2)$ und $(1\ 2\ 3\ \dots\ n)$ erzeugt wird, d.h. jedes Element lässt sich als Produkt von positiven Potenzen dieser beiden Elemente der Gruppe schreiben.

Hinweis: Nutzen Sie die Berechnungen in Aufgabe 1.

Aufgabe 3. Wir betrachten die folgende Permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 7 & 6 & 12 & 4 & 9 & 8 & 11 & 15 & 14 & 5 & 13 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die Zerlegung in disjunkte Zyklen für σ . Welche Ordnung hat σ ? *Die Ordnung eines Elements σ ist die kleinste positive $n \in \mathbb{N}$ für die gilt*

$$\sigma^n = id.$$

- b) Bestimmen Sie eine Zerlegung in Transpositionen für σ .
- c) Bestimmen Sie die Anzahl der Fehlstände

$$\varphi(\sigma) := \#\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq 15 \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

- d) Bestimmen Sie die Signatur von σ .

Aufgabe 4. Eine Nachricht wird folgendermaßen verschlüsselt:

Die Buchstaben A, B, C, \dots , Z werden auf die Restklassen $[0], [1], [2], \dots, [25] \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ abgebildet und $[26]$ entspricht einer Leerstelle. Die entstandenen Restklassen werden als Folge von Paaren angeordnet. Die Funktion

$$f : (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^2 \longrightarrow (\mathbb{Z}/(27\mathbb{Z}))^2, \quad f(x, y) = ([8]x + y + [2], x + [4]y + [1])$$

bildet diese Paare auf neue Paare ab. Anschließend werden die Restklassen wieder wie oben mit Buchstaben identifiziert, und man erhält die verschlüsselte Nachricht.

Entschlüsseln Sie folgenden Text (siehe Kopf des Übungsblattes): FUNQZXHZAEZXDJJCCO

(Hinweis: Lösen Sie, das lineare Gleichungssystem in zwei Unbekannten $x, y \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$

$$[8]x + y + [2] = a$$

$$x + [4]y + [1] = b$$

für beliebige $a, b \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$. Dividieren durch Restklassen entspricht dem Multiplizieren mit deren multiplikativen Inversen. Berechnen Sie (nur) diejenigen, die Sie benötigen.