Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 13

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I WS 2010/11

Abgabe: 7.2.2011, Besprechung: 7.2.-10.2., Test: 14.2.-17.2.

Aufgabe 1. Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ x & - & 10y & - & 7z & = & 1 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Ränge der einfachen und erweiterten Koeffizientenmatrix, für jeden der drei Fälle, in dem der Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ betrachtet wird..
(b) Bestimmen Sie für jeden der Fälle die dazugehörige Lösungsmenge.

Aufgabe 2. Berechnen Sie für die gegebenen reellen Matrizen A, B in jedem Fall $A+B$, $A-B$, $A.B$ und $B.A$, sofern die betreffende Operationen definiert ist.

a) $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3. Inversion von Matrizen :

a) Bestimmen Sie mit Hilfe vom erweiteren Euklidischen Algorithmus ganze Zahlen p, q, so dass $29p + 8q = 1$. Invertieren Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{Z}_{29})$.

b) Invertieren sie die Matrix $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(4, \mathbb{R})$.

Bitte wenden...

Aufgabe 4.

a) Bestimmen Sie alle Matrizen X mit reellen Koeffizienten, die die Gleichung $AX = B$ erfüllen, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}.$$

gegeben sind.

b) Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in M(3; \mathbb{R})$ mit $XC = CX$.

Aufgabe 5.
(a) Sei R ein kommutativer Ring. Seien $A \in M(m, n; R)$ und $B \in M(n, p; R)$ Matrizen mit Koeffizienten in R. Zeigen Sie für deren Transponierte, $A^T \in M(n, m; R)$ und $B^T \in M(p, n; R)$ die Gleichung;

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

(b) Wir identifizieren den Raum der n-Tupel $(x_1, ..., x_n) \in R^n$ mit den Matrizen $M(n, 1; R)$ der einspaltigen Matrizen. Wir definieren das Skalarprodukt auf R^n

$$\langle x, y \rangle_n := x^T y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $x, y \in R^n$. Zeigen Sie, dass für beliebige $A \in M(m, n; R)$, $x \in R^m$ und $y \in R^n$, dass

$$\langle A^T x, y \rangle_n = \langle x, Ay \rangle_m.$$

Hinweis: Beachten Sie die obige Definition und verwenden Sie den ersten Teil der Aufgabe.