Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 14

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I WS 2010/11

Abgabe: 14.2.2011, Besprechung: 14.2.-17.2.

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation. Wir assoziieren zu π die $n \times n$–Matrix $P_\pi = (\delta_{i,\pi(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Zur Erinnerung: $\delta_{ij} = 1$, falls $i = j$ ist und 0 sonst.

a) Beweisen Sie, daß die Zuordnung $\pi \longrightarrow P_\pi$ ein Gruppenhomomorphismus von $S_n \to Gl(n, \mathbb{R})$ ist.

b) Begründen Sie, warum die Determinante $\det P_\pi = \mathrm{sgn}(\pi)$, d.h. die Signatur von π ist.

Aufgabe 3 Überprüfen Sie, ob durch folgende Strukturen auf den Mengen, V, $\mathbb{K}$-Vektorräume definiert werden. Begründen Sie positive wie negative Antwort.

a) $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$, $V := \mathbb{R}$, $+$ ist Addition auf $\mathbb{R}$, $\cdot$ ist Multiplikation der rationalen Zahl mit der rellen.

b) $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, $V := \{(x_n)_{n=0}^\infty |$ relle Folge $, \lim_{n\to\infty} x_n = \infty\}$, $+$ ist Addition von Folgen, $\cdot$ ist Multiplikation jedes Folgengliedes

c) $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, $V := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $v + w := vw$, $\lambda \cdot v := e^\lambda v$, wobei xy für relle Zahen x, y wie üblich das Produkt zwischen den rellen Zahlen notiert.

Bitte wenden...

Aufgabe 4 Überprüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen Untervektorräume sind (das letztere Vektorräume sind soll als bekannt vorausgesetzt werden). Begründen Sie positive wie negative Antwort.

a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ wobei $\mathbb{R}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum ist mit der üblichen Addition und Multiplikation auf den reellen Zahlen.

b) $\{(x_n)_{n=0}^{\infty} |$ relle Folge $, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\} \subset \{(x_n)_{n=0}^{\infty} |$ relle Folge $\}$.

c) $\{p \in \mathbb{K}[t] | \deg(p) \leq 3\} \subset \mathbb{K}[t]$, wobei $\mathbb{K}[t]$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ ist.

Aufgabe 5. Überprüfen Sie, ob folgende Abbildungen $\mathbb{K}$-linear Abbildungen zwischen den $\mathbb{K}$-Vektorräumen sind (Letzteres sei wieder vorausgestzt). Begründen Sie Ihre Entscheidung:

a) $\phi : \mathbb{R} \to V$, mit V aus Aufgabe 3, c), und $\phi(x) := e^x$.

b) $\phi : \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}[t]$ gegeben durch $\phi(p)(t) := p(t^2)$.

c) $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\phi(z) := \overline{z}$, die komplexe Konjugation.

d) $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\phi(z) := \overline{z}$, wie bei c).

Aufgabe 6. Weisen Sie nach, ob die folgenden Familien von Vektoren im jeweiligen Vektorraum linear unabhänging sind.

a)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$.

b) $1 + t + t^2$, $t + 2t^2$, $1 + 3t^2$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}[t]$ der Polynome.

c) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ (siehe Aufgabe 3 a)).