Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

L ösungen zum Übungsblatt 15

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I WS 2010/11

Besprechung am 4.3. 10-12 Uhr, RUD 25 1.013

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $B = ((1,1),(i,1))$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$ ist. Bestimmen Sie für jeden Vektor $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ die Koordinaten bezüglich dieser Basis.

Lösung. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrix, in deren Spalten die Koordinaten der Basisvektoren aus B stehen. Entweder man berechnet die dazu inverse Matrix, A^{-1}. Dann lauten die Koordinaten des Vektors (x,y) bezüglich B: $A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (Sie müssen natürlich A^{-1} berechnen!).
Oder, äquivalent dazu, man löst simultan die linearen Gleichungssysteme (gegeben durch erweiterte Koeffizientenmatrix):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & x \\ 1 & 1 & y \end{array}\right).$$

$$II - I: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & x \\ 0 & 1-i & y-x \end{array}\right).$$

$$II * \frac{1+i}{2}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & x \\ 0 & 1 & (y-x)\frac{1+i}{2} \end{array}\right).$$

$$I - i * II: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1+i}{2}x + \frac{1-i}{2}y \\ 0 & 1 & -\frac{1+i}{2}x + \frac{1+i}{2}y \end{array}\right).$$

Antwort: Der Vektor (x,y) hat bezüglich B die Koordinaten $(\frac{1+i}{2}x + \frac{1-i}{2}y, -\frac{1+i}{2}x + \frac{1+i}{2}y)$. (Folglich ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ -\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}.)$$

Bitte wenden...

Aufgabe 2. Sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2i & 3 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungmatrix von f bezüglich der Basis $B = ((i, 2+i), (i-1, 1-i))$ des Definitionsbereiches und der Basis $B' = ((1,1), (i,1))$ des Wertebereiches.

Lösung. Man muss für die Bilder der Basisvektoren aus B im Definitionsbereich die Koordinaten bezüglich der Basis B' des Wertebereiches bestimmen. Das bedeutet, dass man wieder simultan zwei lineare Gleichungssysteme mit gleichen Koeffizientenmatrizen aber unterschiedlichen rechten Seiten, lösen muss. In den Spalten der Koeffizentenmatrix stehen die Koordinaten der Vektoren aus B, in den Spalten der Matrix rechts vom Trennungsstrich stehen die Koordinaten der Bilder der Vektoren aus B unter f (bezüglich der Standardbasis).

Wir berechnen

$$\begin{aligned} f(\begin{pmatrix} i \\ 2+i \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 4+3i \\ 3+i \end{pmatrix} \\ f(\begin{pmatrix} i \\ 2+i \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 1-5i \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also lösen wir folgende zwei Gleichungssysteme:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 4+3i & 1-5i \\ 1 & 1 & 3+i & 2 \end{array}\right).$$

Da die Basis genau die Basis aus Aufgabe 1 ist, könnten wir jetzt einfach die dort gefundene Lösung hier verwenden. Um zu illustrieren, wie dies im Allgemeinen geht, wird der Algorithmus noch einmal angedeutet:

Nach den Umformungen aus Aufgabe 1 ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5+5i}{2} & 4-3i \\ 0 & 1 & \frac{1-3i}{2} & -2+3i \end{array}\right).$$

Antwort: Die Matrix von f bezüglich der Basen B und B' ist

$$\begin{pmatrix} \frac{5+5i}{2} & 4-3i \\ \frac{1-3i}{2} & -2+3i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Der Unterraum $W \subset \mathbb{R}^5$ sei durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Bestimmen Sie eine Basis von W. Entscheiden Sie, ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in W liegen. Ist dies der Fall, geben Sie die Koordinaten bzgl. der von Ihnen gefundenen Basis an.

Lösung. Die drei Teilaufgaben lassen sich simultan lösen, da man dafür immer den Gauss-Jordan-Algorithmus auf die Matrix anwendet, deren Spalten durch die Koordinaten der Vektoren gegeben sind.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 5 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & -5 & -7 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 11 & 1 \end{array}\right).$$

$$II - I, III + I, V - 3 * I : \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 5 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -11 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

$$III + II, IV + II, V - 7 * II : \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 5 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 38 & 38 & 76 & -2 \end{array}\right).$$

$$III * (-\frac{1}{4}) : \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 5 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 38 & 38 & 76 & -2 \end{array}\right).$$

$$IV + 5 * III, V - 38 * III : \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 5 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -5 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{\frac{9}{4}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{\frac{23}{2}} \end{array}\right).$$

Bitte wenden...

Daraus folgt: die (ersten 3) Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis. Der Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$ liegt in W, der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hingegen nicht, da in der zu letzterem gehörenden Spalte unterhalb der letzten Pivot*zeile* von Null verschiedene Einträge sind (fett gedruckt).

Um die Koordinaten des ersten Vektors bezüglich der soeben gefundenen Basis zu berechnen, führt man den Gauss-Jordan-Algorithmus nun zum Ende (die letzte Spalte können wir jetzt weglassen, da der zweite Vektor nicht in W liegt und folglich die Frage nach seinen Koordinaten bzgl. der Basis sinnlos ist. Die vierte Spalte gehört zum Vektor, der nicht zur Basis geh ört und spielt deshalb keine Rolle bei der Berechnung der Koordinaten, genau wie die letzten beiden Zeilen, die nun zu Nullzeilen geworden sind. Diese können also ebenso an dieser Stelle weggelassen werden.):

$$II * \frac{1}{2} : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

$$I - 5 * II : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{41}{2} & \frac{63}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

$$I - \frac{41}{2} * III, II + \frac{7}{2} * III : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Die Koordinaten des ersten Vektors bzgl der gefundenen Basis lauten $(-\frac{19}{2}, -\frac{3}{2}, 2)$.

Hinweis: Für die Richtigkeit der Rechnung gibt es keine Garantie, wohl aber für die Korrektheit der vorgeschlagenen Lösungswege.