HOLOMORPHE KURVEN, HAMILTONSCHE DYNAMIK UND SYMPLEKTISCHE TOPOLOGIE

KLAUS MOHNKE

Zusammenfassung. Ziel dieses Artikels ist es zu zeigen, wie man ein altes Problem der symplektischen Topologie mit Hilfe neuer Techniken, die auf Eigenschaften gewisser nicht kompakter pseudoholomorpher Kurven beruhen, effektiv beweisen kann: Es gibt keine Lagrange Einbettung der Kleinschen Flasche in den $\mathbb{C}^2$. Die allgemeine Fragestellung wird erläutert und eine kurze Einführung in die entsprechenden Invarianten gegeben.

1. Holomorphe Scheiben und Lagrange Einbettungen

(Pseudo)holomorphe Kurven werden seit Gromovs bahnbrechender Arbeit [9] erfolgreich beim Studium der symplektischen Topologie verwendet. Ein Beispiel dafür ist das Studium der Topologie Lagranger Einbettungen, insbesondere in den $\mathbb{C}^n$. Eine *Lagrange Untermannigfaltigkeit* $L^n \subset \mathbb{C}^n$ ist dadurch charakterisiert, daß $T_xL \perp J_0(T_xL)$ ist, wobei

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \in End(\mathbb{R}^{2n})$$

die komplexe Standardstruktur auf $T_x\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$ ist, mit $J_0^2 = -Id$.

1.1. Holomorphe Scheiben.

Folgendes Resultat aus Gromovs eingangs erwähnter Arbeit lieferte überraschende Obstruktionen gegen die Existenz Lagranger Einbettungen in den $\mathbb{C}^n$.

Theorem 1. *Für jede geschlossene Lagrange-Untermannigfaltigkeit $L \subset \mathbb{C}^n$ gibt es eine nicht-konstante holomorphe Abbildung auf der Einheitskreisscheibe $u = (u_1, ..., u_n) : \Delta \to \mathbb{C}^n$, mit der Randbedingung $u(\partial\Delta) \subset L$.* □

Diese Eigenschaft wird nun in der folgenden Weise ausgenutzt. Sei $\varphi = \varphi(x, y)$

$$\varphi = (X_1, ...X_n, Y_1, ..., Y_n) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subset \mathbb{C}^n.$$

H sei die Hermitesche Standardform auf $\mathbb{C}^n$, $\omega_0 := \Im m(H)$ bezeichne deren Imaginärteil. Dann definiert

$$(\varphi^*\omega_0)_{(x,y)}(\partial_x, \partial y) := \omega_0(d\varphi_{(x,y)}\partial_x, d\varphi_{(x,y)}\partial_y) = \sum_{j=1}^{n}(\partial_x X_i \partial_y Y_i - \partial_y X_i \partial_x Y_i)$$

ein signiertes Maß, oder Flächenform, auf U. Weiterhin bekommen wir für die Parametrisierung $\gamma = \gamma(\tau) : [0,1] = (X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n) \to \mathbb{C}^n$ einer Kurve ein signiertes Maß

$$\gamma^*\theta_0(\partial_\tau) := \sum_{i=1}^{n} X_i \partial_\tau Y_i$$

Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit stückweise glattem Rand bekommen wir mit dem Greenschen Integralsatz

$$\int_\Omega \varphi^*\omega_0 = \int_{\partial\Omega} (\varphi|_{\partial\Omega})^*\theta_0$$

Seien nun $\varphi_i : \Sigma \to L$ glatte Abbildungen vom 2-Simplex ($\sigma := \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$), die die Teile der endlichen Tringulierung einer orientierten Fläche $\Sigma \subset L$ so parametrisieren, daß die induzierten Orientierungen mit der der Fläche übereinstimmen. Dann folgt aus der letzten Formel, daß

$$\int_\Sigma \omega_0 := \sum_i \int_\sigma \varphi_i^*\omega_0 = \sum_i \int_{\partial\sigma \cap \varphi^{-1}\partial\Sigma} \varphi_i^*\theta_0 =: \int_{\partial\Sigma} \theta_0$$

Man rechnet nun leicht nach, daß aufgrund der Bedingung an L, $\omega_0(X,Y) = 0$ für alle Tangentialvektoren X, Y an L ist. Folglich ist $\varphi_i^*\omega_0 = 0$ für alle i und

$$\int_{\partial\Sigma} \theta_0 = 0$$

für stückweise glatte Ränder von Flächen in L.

Andererseits ist für die holomorphe Scheibe $u : \Delta \to \mathbb{C}^n$

$$\int_\Delta u^*\omega = \int_\Delta \omega\Big(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}\Big) dsdt$$

für Koordinaten $s + it \in \Delta$. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen für die Komponenten u_j lassen sich bequem durch J ausdrücken:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = J(\frac{\partial u}{\partial s}). \tag{1}$$

Es ist leicht zu sehen, daß

$$v \cdot w = \omega_0(v, J_0 w)$$

für das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2n}$. Eine der nützlichsten Eigenschaften holomorpher Kurven für die symplektische Geometrie ist die folgende Positivität:

$$\int_\Delta u^*\omega_0 = \int_\Delta |\frac{\partial u}{\partial s}|^2 dsdt > 0,$$

da es nur verschwinden würde, falls u konstant wäre. Mit Stokes erhalten wir

$$\int_{u(\partial\Delta)} \theta_0 := \int_\Delta u^*\omega_0 > 0.$$

Insbesondere kann $\gamma := u(\partial\Delta)$ nicht der Rand einer Fläche in L sein. Es ist demnach homologisch nicht-trivial. Es kann auch keine Torsion sein, da für die k-fache Überlagerung γ' immer noch positiv ist:

$$\int_{\gamma'} \theta_0 = k \int_{\gamma} \theta_0 > 0.$$

Demnach haben wir Folgendes gezeigt:

Folgerung 2. *Ist $L \subset \mathbb{C}^n$ eine geschlossene Lagrange Untermannigfaltigkeit, so gibt es eine geschlossene Kurve auf L derart, daß kein nicht-triviales Vielfaches eine Fläche in L berandet (ohne weitere Randkomponenten). Mit anderen Worten die erste Betti-Zahl von L verschwindet nicht, $b_1(L) \geq 1$. L kann insbesondere nicht einfach-zusammenhängend sein.* □

1.2. **Symplektische und fast komplexe Strukturen.** Die Bedingung $T_xL \perp J_0(T_xL)$ suggeriert fälschlicherweise, daß dies eine Eigenschaft ist, die mit der euklidischen Geometrie des $\mathbb{C}^n$ zusammenhängt. Die natürlichere Beschreibung der Objekte der symplektischen Geomerie erfolgt mittels Differentialformen. ω_0 kann als eine 2-Form auf $\mathbb{C}^n$ aufgefaßt werden. $L \subset \mathbb{C}^n$ ist nun eine Lagrange Untermannigfaltigkeit, falls die Einschränkung $\omega_0|_L = 0$ verschwindet. Die 2-Form $\omega_0 = \sum_k dx_k \wedge dy_k \in \Omega^2(\mathbb{C}^n)$ ist der Prototyp einer *symplektischen Form.* Allgemein sind dies 2–Formen $\omega \in \Omega^2(M^{2n})$ auf gerad-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die auf jedem Tangentialraum nicht-entartete antisymmetrische Bilinearformen definieren, sowie geschlossen sind: $d\omega = 0$ (für eine ausführlichere Einführung siehe z.B. [16]).

Die 2-Form ist nun exakt, d.h. $\omega_0 = d\theta_0$ mit $\theta_0 = \sum_k x_k dy_k$. Also folgt aus der Lagrange-Bedingung, daß $\theta_0|_L$ eine geschlossene Form ist:

$$d(\theta_0|_L) = (d\theta_0)|_L = \omega_0|_L = 0.$$

Dann brauchen wir nur noch die Rechnung mit der holomorphen Abildung u wie oben und erhalten

Folgerung 3. *Die deRham-Kohomologieklasse $[\theta|_L] \in H^1(L)$ verschwindet nicht. Insbesondere verschwindet die erste Betti-Zahl einer geschlossenen Lagrangen Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{C}^n$ nicht.*

Damit beantwortete Gromov Arnolds Frage, ob es geschlossene Lagrange Untermannigfaltigkeiten gibt, für die $\theta|_L$ exakt ist. Für die Existenz der holomorphen Abbildung benutzte Gromov Invarianz–Eigenschaften von Räumen sogenannter pseudoholomorpher Kurven in $\mathbb{C}^{n+1}$ zusammen mit seinem Kompaktheitsresultat für Folgen solcher Abbildungen mit "Bubbling".

Man sagt, daß eine *fast komplexe Struktur* $J = \{J_z \in End(T_zM\}$, $J^2 = -Id$, auf einer Mannigfaltigkeit M *kompatibel* zu einer 2–Form ω ist, falls durch $\omega(v, Jw)$ ein euklidisches Produkt auf jedem Tangentialraum definiert wird (oder auch eine Riemannsche

Struktur auf M). Die Cauchy–Riemann–Gleichungen (1) kann man für *beliebige* fast-komplexe Strukturen hinschreiben. Lösungen heißen dann pseudoholomorphe (auch: J-holomorphe) Kurven. Wir werden sie einfach nur holomorphe Kurven nennen. Das Studium der Lösungsräume pseudo-holomorpher Kurven ist heute eines der Hauptwerkzeuge der symplektischen Topologie (siehe [1]), der auch weite Teile des Studiums (Hamiltonscher) dynamischer Systeme eingenommen hat (siehe [12]), sowie mit der Definition der Gromov-Witten-Invarianten für symplektische Strukturen (die im wesentlichen die Lösungen zählt) enge Verbindungen zur Stringtheorie und der algebraischen Geometrie knüpft (siehe [17]).

1.3. **Lagrange Einbettungen.** Interessanterweise gilt dies nicht für Lagrange Immersionen $\iota : L^n \to \mathbb{C}^n$. Z.B. läßt jede n-Sphäre S^n eine solche Immersion zu. Für S^3 kann man darüber hinaus eine total reelle Einbettung finden, d.h. $T_xL \cap J_0(T_xL) = \{0\}$ für die Tangentialräume der Untermannigfaltigkeit L. Das ist eine schwächere Bedingung als Lagrange zu sein. Also ist jede Lagrange Einbettung auch eine total reelle Einbettung. Letzteres liefert die einzige differential-topologisch gewonnene Obstruktion für die Existenz einer Lagrangen Einbettung einer geschlossenen n-Mannigfaltigkeit in den $\mathbb{C}^n$, die sich also im Fall der 3-Sphäre als zu schwach erweist (siehe [2]).

Für geschlossene Flächen konnte die Frage, welche eine Lagrange Einbettung in den $\mathbb{C}^2$ zulassen, fast vollständig durch die total reelle Einbettbarkeit beantwortet werden. Jede Fläche, die sich total reell in den $\mathbb{C}^2$ einbetten läßt, besitzt auch eine Lagrange Einbettung – mit einer Ausnahme: der Kleinschen Flasche. Diese läßt eine eine total reelle Einbettung zu und hat darüber hinaus nicht-verschwindene erste Betti-Zahl. Mit einer erweiterten Klasse von nun nicht-kompakten holomorphen Kurven kann man schließlich zeigen

Theorem 4 ([19, 20])**.** *Es gibt keine Lagrange Einbettung der Kleinschen Flasche in den $\mathbb{CP}^2$ versehen mit der Fubini–Study–Form. Insbesondere gibt es dann keine in den $\mathbb{C}^2$.*

2. Flache Lagrange Flächen in $\mathbb{CP}^2$

Zum Beweis des Theorems 4 konstruieren wir eine Reihe von *punktierten holomorphen Kurven* die einen Teil des Grenzwertes einer Folge pseudoholomorpher Kurven in $\mathbb{CP}^2$ bildet. Die zur Fubini–Study–Form kompatiblen fast-komplexen Strukturen degenerieren dabei in den Punkten der Lagrange–Untermannigfaltigkeit. Das ist das Thema des gesamten Rests dieser Abhandlung.

Satz 5. *Sei $L \subset \mathbb{CP}^2$ eine Lagrange–Einbettung einer flachen geschlossenen Fläche (Torus oder Kleinsche Flasche) bezüglich der Fubini–Study–Form. Dann gibt es drei glatte Sphären F, G und $H : S^2 \to \mathbb{CP}^2 \setminus L$, deren Fundamentalklassen alle $H_2(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z})$ erzeugen, sowie zwei glatte Scheiben D und $E : \Delta \to \mathbb{CP}^2$ mit Rand auf L, die den folgenden* *algebraischen Schnittbedingungen genügen:*

$$\begin{aligned} F\cdot D &= 1, \quad & F\cdot E &= 0\\ G\cdot D &= 0, \quad & G\cdot E &= 1\\ H\cdot D &= 0, \quad & H\cdot E &= 0. \end{aligned}$$

Beweis von Theorem 4. Wir zeigen, daß die Ränder ∂D, ∂E linear unabhängig in $H_1(L;\mathbb{Q})$ sind. Sei also

$$k[\partial D] + l[\partial E] = 0 \in H_1(L;\mathbb{Z})$$

für eine Paar ganzer Zahlen (k,l). Daß heißt es gibt eine 2–Kette $C \in C_2(L;\mathbb{Z})$ mit $\partial C = k\partial D + l\partial E$. Somit ist $kD + lE - C \in Z_2(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z})$ ein 2–Zyklus, den wir jetzt gegen die pseudoholomorphen Sphären testen:

$$\begin{aligned} (kD + lE - C)\cdot F &= k\\ (kD + lE - C)\cdot G &= l\\ (kD + lE - C)\cdot H &= 0. \end{aligned}$$

Da $[F] = [G] = [H] \in H_2(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z})$ muß $k = l = 0$ sein, und die Behauptung ist gezeigt. Also ist $b_1(L) \geq 2$ und L kann somit nicht die Kleinsche Flasche sein. $\square$

3. Punktierte holomorphe Kurven

Schon Floer hat die Klasse der betrachteten holomorphen Kurven beträchtlich erweitert auf Abbildungen vom Zylinder $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$ (bzw. $\mathbb{R}\times[0,1]$) in die symplektischen Mannigfaltigkeit mit kompatibler fast-komplexer Struktur. Diese erfüllen eine inhomogene Cauchy-Riemann-Gleichung, die durch das Differential einer periodisch zeitabhängigen reellen Funktion bestimmt wird [7, 8]. Interessant ist noch, daß im Falle des Zylinders die beiden Enden gegen periodische Lösungen des zugehörigen Hamiltonschen System konvergieren. Floer zeigte damit eine berühmt gewordene Vermutung von Arnold über die Zahl solcher periodischer Lösungen, die genau den Fixpunkten gewisser die symplektische Struktur erhaltenden Diffeomorphismen entsprechen.

Tatsächlich haben Floer's Abbildungen vieles mit den *punktierten holomorphen Kurven* der symplektischen Feldtheorie gemeinsam, die im Folgenden besprochen werden sollen.

Die Hauptidee ist, holomorphe Abbildungen punktierter Riemannscher Flächen in Symplektisierungen von Kontaktmannigfaltigkeiten zu beschreiben. Nahe der Punktierungen sind diese asymptotisch zu Zylindern über Reeb-Bahnen im positiven bzw. negativen Ende des Zylinders. Hofer hat in [13] diese als erster studiert und erfolgreich auf das Weinstein–Problem der Existenz geschlossener Reeb-Bahnen angewandt.

3.1. **Kontaktstrukturen und Symplektisierungen.** Wir müssen zunächst die geometrischen Daten diskutieren. Eine *Kontaktstruktur* auf einer ungerad-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine Hyper-Distribution ξ die maximal nicht-integrabel in folgendem Sinne ist: Für jede nirgends verschwindende 1–Form α mit $\ker(\alpha) = \xi$, ist

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0.$$

Alternativ, kann man auch fordern, daß $d\alpha|_\xi$ überall eine nicht-degenerierte antisymmetrische Bilinearform auf ξ definiere. Wir setzen voraus, daß ξ koorientierbar ist, d.h. daß diese 1-Form α global existiert. So eine Form nennen wir *Kontaktform*. Jede Kontakt*struktur* definiert auf kanonische Weise eine symplektische Mannigfaltigkeit. Ist sie koorientierbar, ist dies eine symplektische Struktur auf dem Zylinder $\mathbb{R} \times M$: Mittels einer Kontakt*form* kann diese *Symplektisierung* explizit beschrieben werden durch die symplektische Form $\omega_\alpha := d(e^r\alpha)$, wobei $r \in \mathbb{R}$ ist. Die Kontaktform bestimmt eindeutig ein Vektorfeld durch

$$i_R d\alpha = 0$$
$$\alpha(R) = 1.$$

Dieses sogenannte *Reeb-Vektorfeld* ist das Hamiltonfeld der Funktion $H(r,x) = r$ auf $\mathbb{R} \times M$ bezüglich der symplektischen Form $d(e^r\alpha)$. Das nächste Beispiel soll diese Begriffe veranschaulichen und ist andererseits auch wichtig für den Beweis von Satz 5.

Beispiel 6. *Sei L eine beliebige Mannigfaltigkeit. Ihr Kotangentialbündel T^*L besitzt eine natürliche symplektische Struktur, die auf die folgende Weise gegeben wird. Die kanonische 1-Form $\theta \in \Omega^1(T^*L)$ wird durch*

$$\theta_l(X) = l(\pi_* X)$$

gegeben, wobei $l \in T^*L$ ein Kotangetialvektor ist, $X \in T_l(T^*L)$ ein Tangentialvektor an T^*L in l und π_* das Differential der Projektion $T^*L \to L$. Man prüft leicht nach, z.B. durch Wahl lokaler Koordinaten auf L, daß das äußere Differential $d\theta \in \Omega^2(T^*L)$ symplektisch ist. Jetzt wählen wir noch eine Riemannsche Metrik g auf L. Die Einschränkung von θ auf die Menge der Einheitskotangentialvektoren, S^*L, ist dann eine Kontaktform. Das zugehörige Reebvektorfeld ist vollständig durch g gegeben. Deren Flußlinien (in T^*L) projezieren natürlich auf Geodäten in (L,g)! Bahnen des Reebvektorfeldes entsprechen somit genau den orientierten *Geodäten.*

Damit die unten eingeführten punktierten holomorphen Kurven analytisch handhabbar sind, muß man an den Reebfluß Bedingungen stellen. Es gibt im Wesentlichen zwei Möglichkeiten. Die erste läßt sich durch generische Wahl von α immer erreichen:

Nichtentartung. Die Linearisierung des Flusses (oder auch Poincaréabbildung) für jede beliebige geschlossene Bahn des Reebflusses hat keinen Eigenvektor mit Eigenwert 1, außer dem Tangentialvektor an die Bahn (der ohnehin oft ignoriert wird).

Es gibt aber auch oft Situationen, in denen man alle geschlossenen Reeb–Bahnen kennt, diese jedoch in hohem Maße in obigem Sinne entarten. Ist diese Entartung durch die geometrische Situation diktiert, bleibt die Analysis der punktierten holomorphen Kurven immer noch handhabbar:

Morse–Bott. Jeder Eigenraum zum Eigenwert 1 der Poincaréabbildung ist genau durch die Deformationen der geschlossenen Reeb–Bahn gegeben (und dem Tangentialvektor an diese).

3.2. **Kompatible fast-komplexe Strukturen und punktierte holomorphe Kurven.** Auf $\mathbb{R}\times M$ ist nun eine (nicht-leere) Menge von fast–komplexen Strukturen charakterisiert durch

$$J(\xi) = \xi$$
$$J(\frac{\partial}{\partial r}) = R_\alpha$$

sowie der üblichen Forderung, daß J ω_α–kompatibel ist. Zusätzlich fordern wir noch Translations-Invarianz bezüglich des $\mathbb{R}$-Faktors. Wir nennen eine solche Struktur α–kompatibel.

3.3. **Symplektische Kobordismen.** Eine natürliche Klasse von symplektischen Mannigfaltigkeiten bilden die *symplektischen Kobordismen.*

Definition 7. (1) *Eine symplektische Mannigfaltigkeit* (W,ω) *ist ein* symplektischer Kobordismus, *falls es zwei (möglicherweise leere oder nicht zusamenhängende) Kontaktmannigfaltigkeiten* $(\overline{M},\overline{\xi}),(\underline{M},\underline{\xi})$ *gibt und eine symplektische Einbettung*

$$(\mathbb{R}_+\times\overline{M},d(e^r\overline{\alpha}))\sqcup(\mathbb{R}_-\times\underline{M},d(e^r\underline{\alpha}))\longrightarrow(W,\omega)$$

deren Bild ein kompaktes Komplement in W *hat.*

(2) *Eine fast komplexe Struktur auf einem symplektischen Kobordismus heißt* kompatibel, *falls sie kompatibel zu* ω *ist und ihre Einschränkung auf* $[c,\infty)\times M$ *(bzw.* $(-\infty,d]\times M$*)) bezüglich der obigen Abbildungen die Einschränkung einer kompatiblen fast–komplexen Struktur* $\overline{J}$ *bzw.* $\underline{J}$ *auf der Symplektisierung ist, für* c *und* $-d$ *hinreichend groß.*

3.4. **Aufspaltung und Verklebung von symplektischen Kobordismen.** Man kann eine symplektische Manigfaltigkeit (W,ω) unter folgender Voraussetzung in symplektische Kobordismen "zerlegen". Sei $M\subset W$ eine geschlossene Hyperfläche vom *Kontakttyp.* Das bedeutet, daß es auf M eine Kontaktform α gibt, so daß $\omega|_M = d\alpha$. Dann ist eine Kragenumgebung von M symplektomorph zu $([-\epsilon,\epsilon]\times M, d(e^r\alpha))$, wobei M mit $\{0\}\times M$ identifiziert wird. Außerdem setzen wir voraus, daß W durch M in $W\setminus M = W_0^+\sqcup W_0^-$ zerlegt wird. Die Teile $W_0^\pm$ werden durch $\{\pm\epsilon\}\times M\subset W_0^\pm$ charakterisiert.

Beispiel 8. *Die Menge $S^*L \subset T^*L$ ist eine Hyperfläche vom Kontakttyp. Sei nun $L \subset W$ eine geschlossene Lagrange Untermannigfaltigkeit. Dann ist eine hinreichend kleine Umgebung von L symplektomorph zu einer Umgebung des Nullschnittes in $(T^*L, d\theta)$. Nach Reskalierung einer gegebenen Metrik kann man annehmen, daß dies das Einheitskugelbündel bezüglich dieser ist. Der Rand dieser Umgebung ist demnach eine Hyperfläche vom Kontakttyp in W!*

Man kann $W_0^\pm$ durch Verkleben der Kragen der Ränder von $(W_0^\pm, \omega|_{W_0^\pm})$ mit denen von $((-\infty, \epsilon) \times M, d(e^r\alpha))$ bzw. $(-\epsilon, \infty) \times M, d(e^r\alpha))$ zu symplektischen Mannigfaltigkeiten $(W^\pm, \omega^\pm)$ "vervollständigen". Sind wir mit einem symplektischen Kobordismus (W, ω) gestartet, so sind beide so erhaltenen $(W^\pm, \omega)$ wieder symplektische Kobordismen.

Beispiel 9. *In unserem obigen Beispiel ist (W^+, ω^+) symplektomorph zu $(W \setminus L, \omega|_{W\setminus L})$, und (W^-, ω^-) zu $(T^*L, d\theta)$.*

Eine Umkehrung dieser *Aufspaltung* einer symplektischen Mannigfaltigkeit kann wie folgt durch eine *Verklebung* von zwei symplektischen Kobordismen $(W^\pm, \omega^\pm)$ beschrieben werden. Nehmen wir an, daß ein Ende von (W^+, ω^+) symplektomorph zu $((-\infty, c^+] \times M, d(e^r\alpha))$ und ein Ende von (W^-, ω^-) symplektomorph zu $[c^-, \infty) \times M, d(e^r\alpha))$ ist. Für jedes $\tau \in (-\infty, c^+]$ ist dann ein Kragen von $\{\tau\} \times M \subset W^+$ symplektomorph zu einem Kragen von $\{c^-\} \times M \subset W^-$ mit der reskalierten symplektischen Form $e^{\tau - c^-}\omega^-$. Somit bekommen wir auf der Verklebung $(W^+ \setminus (-\infty, \tau] \times M) \cup_M (W^- \setminus [c^-, \infty))$ eine symplektische Struktur. Die symplektische Mannigfaltigkeit bezeichnen wir mit (W_τ, ω_τ). Sei J_M eine α–kompatible fast komplexe Struktur auf $\mathbb{R} \times M$. Sind dann $J^\pm$ kompatible fast-komplexe Strukturen auf $W^\pm$, die mit J_M auf den Enden übereinstimmen, so erhalten wir durch diese Verklebung eine *Familie* $\{J_\tau\}$ von ω_τ–kompatiblen fast komlexen Strukturen auf W_τ.

3.5. **Punktierte holomorphe Kurven.** Wir fixieren eine kompatible fast-komplexe Struktur J auf dem symplektischen Kobordismus (W, ω). Seien $\overline{\gamma}_1, ..., \overline{\gamma}_{\overline{s}} \subset \overline{M}$ sowie $\underline{\gamma}_1, ..., \underline{\gamma}_{\underline{s}} \subset \underline{M}$ geschlossene Reeb–Bahnen. Diese durchlaufen die geometrische Bahn möglicherweise mehrfach. Bezeichne $m(\gamma)$ die Vielfachheit mit der die periodische Reeb–Bahn γ die geometrische Bahn durchläuft. $\overline{T}_j$ $(\underline{T}_j)$ bezeichne die Periode oder auch *Wirkung* der Bahn:

$$T_j := \int_{\gamma_j} \alpha.$$

Beispiel 10. *Ein Zylinder über einer geschlossenen Reeb–Bahn γ in der Symplektisierung einer Kontaktmannigfaltigkeit mit translationsinvarianter, kompatibler fast komplexer Struktur ist eine komplexe Kurve. Parametrisiert man die Bahn mit $\mathbb{S}^1 := [0, 1]/0 \sim 1$, $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$, dann ist $\dot\gamma = T_\gamma R_\alpha / |R_\alpha|$. Dann ist $u_\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R} \times M$ mit*

$$u_\gamma(s, t) = (T_\gamma s, \gamma(t)),$$

eine holomorphe Parametrisierung.

Definition 11. *Eine* punktierte J–holomorphe Sphäre*, mit* positiven Asymptotiken $\overline{\Gamma} := (\overline{\gamma}_1, ..., \overline{\gamma}_{\overline{s}})$ *und* negativen Asymptotiken $\underline{\Gamma} := (\underline{\gamma}_1, ..., \underline{\gamma}_{\underline{s}})$ *ist durch folgende Daten gegeben:*

(1) *paarweise verschiedenen Punkten* $\overline{z}_1, ..., \overline{z}_{\overline{s}}, \underline{z}_1, ..., \underline{z}_{\underline{s}} \in \mathbb{CP}^1$ *(Wir bezeichnen mit* $\dot{\Sigma} := \mathbb{CP}^1 \setminus \{\overline{z}_1, ..., \overline{z}_{\overline{s}}, \underline{z}_1, ..., \underline{z}_{\underline{s}}\}$*, falls Verwechslungen ausgeschlossen sind),*

(2) *einer J–holomorphen Abbildung von der punktierten Riemannschen Fläche* $u : (\dot{\Sigma}, j) \to W$*, d.h.*
$$du \circ j = J \circ du,$$
die nahe der Punkte $\overline{z}_j$ $(\underline{z}_j)$ *vollständig in das Ende* $\mathbb{R}_\pm \times M_\pm$ *abbildet und dort folgende Form besitzt: in Koordinaten* $(s, t) \mapsto \overline{z}_j + \exp(-(s + it))$ $(\underline{z} + \exp(s + it))$ *ist* $u = u(s, t)$ *exponentiell asymptotisch zu* $u_{\overline{\gamma}_j}$ $(u_{\underline{\gamma}_j})$ *wenn* $|s| \to \infty$.

Bemerkung 12. *Punktierte holomorphe Kurven (in Symplektisierungen) wurden erstmals von Hofer in* [13] *durch Analyse gewisser Folgen (kompakter) pseudoholomorpher Scheiben konstruiert. Die wesentliche Eigenschaft, die für eine beliebige J–holomorphe Abbildung* $u : \dot{\Sigma} \to W$ *entweder die Hebbarkeit in den Punktierungen oder die Asymptotik garantiert, ist die Endlichkeit einer "Energie", die sich für Symplektisierungen wie folgt formulieren läßt:*
$$\sup\{\int_{\dot{\Sigma}} u^* d(\phi\alpha) \mid \phi : \mathbb{R} \to [0, 1], \phi' \geq 0\} < \infty.$$
In [10, 11] *haben Hofer, Wysocki und Zehnder solche Asymptotiken für den Fall gezeigt, daß der Reeb–Fluß nichtdegeneriert ist bzw. Morse–Bott.*

Beispiel 13. *Eine Riemannsche Struktur auf einer Mannigfaltigkeit L induziert eine fast–komplexe Struktur J_0 auf T^*L, die zwar kompatibel zu $d\theta$, nicht aber zu* $\alpha := \theta|_{U^*L}$ *ist. In ihr ist der Anullator der Normalenrichtungen einer Geodätischen γ ein komplexer Zylinder. Durch Streckung und Stauchung sind alle r–Sphärenbündel*
$$\{\nu \in T^*L \mid \|\nu\| = r\}$$
mit dem Einheitssphärenbündel identifiziert. Somit kann man die dort definierte komplexe Struktur auf der Kontaktdistribution translationsinvariant auf alle r–Sphärenbündeln transportieren. Diese ist verschieden von J_0. Mittels Abschneidefunktion $\Phi = \Phi(r)$ auf T^*L definieren wir eine fast-komplexe Struktur J, die in der Nähe des Nullschnittes mit J_0 übereinstimmt. Mit Parameter $t := \ln r$ ist sie translationsinvariant. $J(\frac{\partial}{\partial t})$ ist das Reebvektorfeld (Geodätenfeld) auf dem Einheitskotangentialbündel für $r \geq 1$, sowie überall parallel zu $J_0(\frac{\partial}{\partial t})$. Dann kann die vorher beschriebene J_0–holomorphe Kurve als 2–fach punktierte J–holomorphe Sphäre f_γ parametrisiert werden.

Lemma 14. *Sei (L, g) der flache n–Torus. Dann sind* alle *J–holomorphen zweifach punktierten Sphären, die den Nullschnitt o_L schneiden, von der oben beschriebenen Form.* □

Bemerkung 15. *Diese Aussage gilt auch für die flache Kleinsche Flasche, da diese durch den Torus zweifach überlagert werden kann und sich die holomorphe Sphäre mit zwei Punktierungen unverzweigt zu einer doppelten Überlagerung der ursprünglichen Kurve heben läßt.*

Beispiel 16. *Sei ein beliebiger holomorpher Zylinder in der Symplektisierung $\mathbb{R} \times S^*L$ (für den flachen Torus (L, g) wie oben) gegeben. Dann sind die Geodäten, die zu den Asymptotiken gehören, homolog und haben damit die gleiche Länge bzw. deren zugehörige Reeb–Bahnen haben die gleiche Wirkung. Das bedeutet aber, daß die beiden Geodäten und deren Reeb–Bahnen gleich sind und wir es a priori mit einem Zylinder über dieser zu tun haben.*

3.6. **Kompaktifizierungen punktierter holomorpher Kurven.** Wir benutzen die Asymptotik punktierter holomorpher Kurven, um diese zu glatten Abbildungen auf kompakten Flächen mit Rand fortzusetzen.

Für eine punktierte Riemannsche Fläche $\dot{\Sigma}$ bezeichne $\overline{\Sigma}$ die glatte, kompakte Fläche mit Rand, wobei zu jeder Punktierung eine Randkomponente gehört. Das interpretieren wir wie folgt: Eine offene Umgebung einer Punktierung ist biholomorph zur punktierten Scheibe $\Delta \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}_\pm \times \mathbb{S}^1$, wobei wir bequemerweise die in der Definition benutzten Koordinaten für positive bzw. negative Punktierungen verwenden. Dann erhalten wir die entsprechende Umgebung der Randkomponente durch Hinzufügen von $\{\pm\infty\} \times \mathbb{S}^1$. Auf diese Weise bekommen wir eine offensichtliche Fortsetzung der Abbildung $u : \dot{\Sigma} \to W$ in einen symplektischen Kobordismus W

$$\overline{u} : \overline{\Sigma} \longrightarrow \overline{W}$$

wobei $\overline{W} := \{\infty\} \times \overline{M} \cup W \cup \{-\infty\} \times \underline{M}$ die Mannigfaltigkeit mit Rand bezeichnet, deren Topologie wir aus der Produktstruktur auf den Enden erhalten.

Beispiel 17. *Sei $W^+ = W \setminus L$ das Komplement einer Lagrangen Untermannigfaltigkeit aus unserem Beispiel 9. Mit Hilfe der Projektion $S^*L \to L$ bekommen wir eine glatte Abbildung $\pi : \overline{W} \to W$ und auf diese Weise definiert $\overline{u}$ eine Abbildung $\pi \circ \overline{u} : \overline{\Sigma} \to W$, die wir ebenfalls einfach mit $\overline{u}$ bezeichnen werden. Diese Abbildung ist im Inneren $\dot{\Sigma} \subset \overline{\Sigma}$ J-holomorph und bildet den Rand in L ab: $\overline{u}(\partial\overline{\Sigma}) \subset L$.*

Bemerkung 18. *Die soeben eingeführte Abbildung $\overline{u} : \overline{\Sigma} \to W$ ist* keine *pseudoholomorphe Kurve in W bezüglich einer kompatiblen fast-komplexen Struktur. Um für den Leser, der mit dem Riemann–Hilbert–Problem vertraut ist, Konfusion zu ersparen, werden im Folgenden einige wesentliche Unterschiede zu diesen aufgelistet.*

(1) *Die konforme Sruktur bezüglich derer u holomorph ist, degeneriert auf dem Rand von $\overline{\Sigma}$.*

(2) *Ähnliches gilt für die kompatible fast–komplexe Struktur von W^+ in den Punkten von L.*

(3) $\overline{u}$ *erfüllt sehr starke "Randbedingungen": Jede Komponente überlagert eine Geodäte auf L. Solche Bedingungen sind für pseudoholomorphe Kurven (mit Rand) nicht wohlgestellt, d.h. daß es sie generisch gar nicht gibt!*

(4) $\overline{u}$ *bildet die inneren Punkte $\dot{\Sigma} \subset \overline{\Sigma}$ in das Komplement von L ab. Es gibt keine Möglichkeit, dies a priori für eine pseudoholomorphe Kurve mit Rand auf L zu kontrollieren.*

4. Eigenschaften punktierter holomorpher Kurven

Wir tragen hier einige wichtige Resultate über Deformationen, Folgenkompaktheit und Positivität von Schnitten (letzteres in Dimension 4) zusammen, die für den Beweis des Theorems notwendig sind.

4.1. **Deformationen punktierter holomorpher Kurven.** Die Diffeomorphismen der Fläche wirken auf den Daten, die die punktierten holomorphen Kurven definieren. Wie im Fall von kompakten holomorphen Kurven kann man die Zahl der Deformationsparameter für punktierte holomorphe Kurven modulo der Diffeomorphismen mit dem Index eines Fredholmoperators berechnen. Der Operator ist durch die Linearisierung der Cauchy-Riemann-Gleichungen im passend gewählten Raum von Abbildungen gegeben. Siehe [3, 4] für eine kurze Darstellung im gegebenen Kontext welche auf Ideen aus [22] basieren. Zusammenfassend gesagt, ist die Dimension sowohl aus den Randdaten des Operators als auch aus seiner Topologie bestimmt.

Im Folgenden werden die einzelnen Beiträge in der Formel erläutert. Da der Reeb–Fluß die Kontaktform α erhält, läßt er insbesondere ξ und die darauf gegebene symplektische Form invariant. Seien Trivialisierungen $\tau = \{\overline{\tau}_j, \underline{\tau}_k\}$ der durch die Kontaktdistribution gegebenen symplektischen Bündel $(\overline{\xi}, d\overline{\alpha})$ bzw. $(\underline{\xi}, d\underline{\alpha})$ über jeder periodischen Reeb–Bahn $\overline{\gamma}_1, ..., \overline{\gamma}_{\overline{p}}$ und $\underline{\gamma}_1, ..., \underline{\gamma}_{\underline{p}}$ fixiert. Für irgend einen Anfangspunkt auf einer Bahn bekommt man so einen Weg von symplektischen Matrizen der Dimension $(2n-2)$. Im allgemeinen hat die Endpunkt-Matrix die 1 als Eigenwert. Auch für solche Wege kann man den Conley–Zehnder–Index $CZ(\overline{\gamma}_j; \overline{\tau}_j)$, $CZ(\underline{\gamma}_j; \underline{\tau}_j)$ definieren (siehe [21]), der nicht vom benutzten Punkt auf der Bahn abhängt. Er wird nicht unbedingt eine ganze Zahl sein. Außerdem definieren die Trivialisierungen eine Chern–Zahl des durch u zurückgezogenen Tangentialbündels, $c_1(u^*TW; \tau)$. Das ist die Anzahl der Nullstellen einer Fortsetzung der Trivialisierung der komplexen Determinante $\det(u^*TW)$ nahe der Punktierungen auf ganz

Σ, gezählt mit Vorzeichen. Die Formel für die "erwartete" Dimension der Deformationsparameter $\overline{Z}, \underline{Z}, \overline{\Gamma}, \underline{\Gamma}, u$ ist dann

$$v - dim(\overline{Z}, \underline{Z}, \overline{\Gamma}, \underline{\Gamma}, u) := \sum_{j=1}^{\overline{p}} (\mathrm{CZ}(\overline{\gamma}_j; \overline{\tau}_j) + \frac{\dim \overline{\gamma}_j}{2}) - \sum_{j=1}^{\underline{p}} (\mathrm{CZ}(\underline{\gamma}_j; \underline{\tau}_j) - \frac{\dim \underline{\gamma}_j}{2})$$
$$+ (n-3)(\chi(\Sigma) - (\overline{p} + \underline{p})) + 2c_1(u^*TW; \tau). \tag{2}$$

Die scheinbare Verletzung der Ganzzahligkeit durch die halben Dimensionen der Familien, in denen die γ_j vorkommen, wird durch die Halbzahligkeit der Conley–Zehnder–Indizes kompensiert, am positiven Ende allerdings anders als am negativen. Die verschiedenen Abhängigkiten von den Trivialisierungen τ heben sich gegenseitig auf.

Beispiel 19. *Sei L eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und γ eine Geodäte mit gewählter Orientierung. Wähle eine Trivialisierung τ der Kontaktdistribution von S^*L auf der entsprechenden Reeb–Bahn. Zusammen mit Reeb– und Normalenrichtung induziert dies eine Trivialisierung von $T(T^*L)$ auf der Bahn als symplektisches Vektorbündel, die eine Trivialisierung von $T(T^*L)$ auf der Geodäten definiert und umgekehrt. Damit erhält man durch die Tangentialräume an den Nullschnitt in T^*L entlang γ eine Schleife von Lagrange–Unterräumen in $\mathbb{C}^n$. Da die erste Homologie des Raumes solcher Unterräume isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, erhalten wir somit eine ganze Zahl $\mu(\gamma; \tau)$ – den* Maslov–Index *der geschlossenen Kurve im Nullschnitt. Es gilt*

$$CZ(\gamma; \tau) = ind(\gamma) + \mu(\gamma; \tau) + \frac{N(\gamma)}{2}$$

(vgl. hierzu [23]). Dabei ist ind der Morse–Index *bezüglich des Längenfunktionals (die Dimension des Raumes der* negativen *Eigenwerte der Hessischen), und $N(\gamma)$ die Dimension des Nullraumes. Für eine globale Trivilialisierung von $T(T^*L)$ definiert der Maslov–Index einen Homomorphismus $\mu : H_1(L; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$. Für eine punktierte holomorphe Kurve in T^*L oder der Symplektisierung $\mathbb{R} \times S^*L$ heißt das, daß sich die Beiträge von μ in der Formel für die Dimension der Deformationen gegenseitig aufheben werden. Sind beispielsweise alle Geodäten Morse–Bott und minimal, so ist die virtuelle Dimension einer solchen gegeben durch*

$$v - dim := \sum_{j=1}^{p_+} (dim(\overline{\gamma}_j) + +(n-3)(\chi(\Sigma) - (p_+ + p_-)).$$

4.2. **Aufspaltung holomorpher Kurven.** Punktierte holomorphe Kurven erhält man beispielsweise als Grenzwerte von Folgen J_τ–holomorpher Kurven, wenn der Parameter τ dabei beliebig groß wird.

Zunächst müssen wir die Grenzobjekte von Folgen solcher Kurven erklären. Diese sind den Grenzwerten von Trajektorien des Gradientenflusses sehr ähnlich. Dort spricht man von "gebrochenen Trajektorien". Also führen wir folgende Bezeichnung ein:

Definition 20. *Seien $(W^{\pm}, \omega^{\pm})$ zwei symplektische Kobordismen. W^+ habe keine positiven, W^- keine negativen Enden. Die (negativen/positiven) Enden von $W^{\pm}$ sind jeweils symplektomorph zur Symplektisierung über derselben Kontaktmannigfaltigkeit M. Die Kontaktform α sei nicht-entartet im Sinne von Morse–Bott. J sei eine kompatible translations-invariante fast komplexe Struktur auf $\mathbb{R} \times M$, $J^{\pm}$ seinen kompatible Strukturen auf $W^{\pm}$, die auf den Enden mit J übereinstimmen. Wir bezeichnen mit $\mathcal{J}$ das Tripel (J, J^+, J^-).*

Eine gebrochene $\mathcal{J}$–holomorphe Sphäre *ist ein Tupel $\mathbf{F} = (F^{(1)}, ..., F^{(N)})$ von punktierten holomorphen Sphären*

$$\begin{aligned} F^{(1)} &: \dot{\Sigma}^{(1)} \to (W^+, J^+) \\ F^{(i)} &: \dot{\Sigma}^{(i)} \to (\mathbb{R} \times M, J) \quad \text{für } i = 2, ..., N-1 \\ F^{(N)} &: \dot{\Sigma}^{(N)} \to (W^-, J^-). \end{aligned}$$

mit Asymptotiken $\underline{\Gamma}^{(i)}, \overline{\Gamma}^{(i)}$, das folgenden Bedingungen genügt:

(1) $\overline{\Gamma}^{(1)} = \underline{\Gamma}^{(N)} = \emptyset$,
(2) $\underline{\Gamma}^{(i-1)} = \overline{\Gamma}^{(i)}$ *für $i = 2, ..., N$,*
(3) *keine der $F^{(i)}$ ist die Vereinigung von Zylindern über Reeb–Bahnen,*
(4) *die Verklebung der kompaktifizierten $\overline{\Sigma}^{(i)}$ entlang der entsprechenden Randkomponenten ist diffeomorph zur Sphäre.*

Die Einschränkungen der Kompaktifizierungen $\overline{F}^{(i)}$ auf die Ränder definieren Überlagerungen der geometrischen Reeb–Bahnen. Demzufolge sind die Verklebungen bis auf Decktransformation eindeutig. Die Daten einer gebrochenen holomorphen Kurve sollen zusätzlich eine Auswahl von solchen Verklebungen enthalten. Dann definiert sie eine stetige Abbildung

$$\overline{F} : \overline{\Sigma} := \cup_i \overline{\Sigma}^{(i)} \longrightarrow \overline{W} := \overline{W^+} \cup \cup_{i=2}^{N-1} \overline{\mathbb{R} \times M} \cup \overline{W^-}.$$

Natürlich ist $\overline{W} \cong W$ und die Fundamentalklasse der Abbildung $\overline{F}$ kann somit als

$$\overline{F} \in \mathbf{H}_2(W; \mathbb{Z})$$

verstanden werden.

Bemerkung 21. *Für die Definition der Invarianten der symplektischen Feldtheorie viel allgemeinere Situationen betrachten muß. Es müssen dann auch mehr als zwei zu verklebende Niveaus einbezogen werden, deren jede zusätzliche positive und negative Punktierungen haben kann, und die Grenzwerte (punktierter) holomorpher Kurven können im Grenwert zusätzlich zum Brechen auch noch "Bubbling" und "Pinching" aufweisen. Für den Beweis von Satz 5 genügt die hier betrachtete Situation, da wir nur eine geschlossene symplektische Mannigfaltigkeit, $\mathbb{CP}^2$, aufspalten, und den Grenzwert von holomorphen Sphären mit primitiver Fundamentalklasse betrachten, was die hier nicht betrachteten Singularitäten ausschließt.*

Satz 22. *Sei $\{f_n\}$ eine Folge J_n–holomorpher Sphären*

$$f_n : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^2,$$

mit primitiver Fundamentalklasse, $[f_n] = 1 \in \mathbf{H}_2(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Bezeichne j die (einzige) konforme Struktur des $\mathbb{CP}^1$. Dann gibt es eine gebrochene $\mathcal{J}$–holomorphe Sphäre $\mathbf{F} = (F^{(1)}, ..., F^{(N)})$, gegen die eine Teilfolge in folgendem Sinne konvergiert: Es gibt Diffeomorphismen $\varphi_n : \overline{\Sigma} \to \mathbb{CP}^1$ derart, daß

(1) *$\varphi_n^* j|_{\dot{\Sigma}(i)}$ in C^∞_{loc} gegen die konforme Struktur der punktierten Sphäre $\dot{\Sigma}(i)$ konvergiert,*
(2) *$f_n \circ \varphi_n|_{\dot{\Sigma}(i)}$ in C^∞_{loc} gegen $F^{(i)}$ konvergiert, und*
(3) *es Diffeomorphismen $\psi_n : W_n \to \overline{W}$ gibt, so daß $\psi_n \circ f_n \circ \varphi_n$ gleichmäßig gegen $\overline{F}$ konvergiert. Diese genügen den folgenden Bedingungen*
  - *$\psi_n|_{W_0^\pm} = id$,*
  - *auf $[-n, 0] \times M$ ist $\psi_n(t, x) = (\tau_n(t), x))$, wobei $\tau_n : [-n, 0] \to \cup_{i=2}^{N-1} \mathbb{R}$ eine Folge von Diffeomorphismen ist, die aus der (Teil)folge der $\{f_n\}$ zu bestimmen ist.*

Aus der dritten Bedingung folgt sofort, daß die Homologieklase $[\overline{F}] = 1$ Erzeugende von $H_2(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z})$ ist. Außerdem bekommt man eine glatte Abbildung $\overline{F^{(1)}} : \overline{\Sigma}^{(1)} \to \mathbb{CP}^2$, die den Rand der Fläche $\overline{\Sigma}^{(1)}$ auf L abbildet, und für die $(F^{(1)})^* \omega \geq 0$ verschieden von 0 für eine Menge vom vollen Maß ist. Es gilt dann

$$\int_{\overline{\Sigma}^{(1)}} \overline{F^{(1)}}^* \omega = \int_{\dot{\Sigma}^{(1)}} (F^{(1)})^* \omega^+ = \langle \omega, [f_n] \rangle = \pi.$$

Die letzte Gleichung hängt von der gewählten Normierung der Fubini-Study-Form ab.

4.3. **Schnittverhalten holomorpher Kurven in Dimension** 4. Pseudoholomorphe Kurven haben viele Eigenschaften mit holomorphen Kurven gemeinsam. Eine sehr wichtige Eigenschaft ist das Schnittverhalten, daß erstmals von McDuff untersucht und angewendet wurde [15]. Der folgende Satz ist eine Teilaussage des Theorems 7.1. aus [18]:

Satz 23. *Auf $\mathbb{C}^2$ sei eine fast-komplexe Struktur J gegeben, für die $J(0) = \sqrt{-1}$ auf $T_0\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^2$. Seien $f_i : \Delta \to \mathbb{C}^2$ zwei J–holomorphe Abbildungen mit $f_1(0) = f_2(0)$. Dann gibt es Umgebungen U_1 und U_2 der 0, so daß entweder*

- *$f_1(U_1) = f_2(U_2)$, oder*
- *$f_1(z_1) \neq f_2(z_2)$ für alle $(0, 0) \neq (z_1, z_2) \in U_1 \times U_2$.*

Im zweiten Fall können wir 0 einen Schnittindex zuordnen, der genau der (wohl–definierten) transversalen Schnittzahl von Störungen der f_i in kleinen Umgebungen $V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i$ entspricht. Dieser Index ist immer positiv. Er ist gleich 1 genau dann, wenn sich f_1 und f_2 in 0 transversal schneiden.

5. Symplektische Feldtheorie

Dieser Abschnitt ist einzig und allein zu dem Zweck eingefügt, das allgemeine Umfeld vorzustellen, in dem punktierte holomorphe Kurven die Hauptrolle spielen. Neben der erklärten Absicht, auf neue Entwicklungen in der symplektischen Geometrie aufmerksam zu machen, versuchen wir auch die grundlegenden Ideen des Beweises von Satz 5 in einem breiteren Kontext darzustellen. Die Darstellung ist so einfach wie möglich gehalten.

5.1. **Kontakthomologie (semiklassisch).** Betrachten wir punktierte holomorphe Kurven in Produkten $\mathbb{R} \times M$ versehen mit translationsinvarianten Daten, so wirken diese auf dem Raum der Lösungen. Das Kompaktheitsresultat (Satz 22) zusammen mit einer Parametrisierung der Enden durch Modulräume gebrochener Kurven (Verklebung) bedeutet dann, daß die Räume der Äquivalenzklassen dieser Wirkung ein Differential auf algebraischen Objekten definieren, die durch die stationären, d.h. translationsinvarianten Lösungen erzeugt werden. Das ist die typische Situation in der Floertheorie.

5.1.1. *Die Differential-Algebra.* In unserem Kontext sind die stationären Lösungen gerade durch Zylinder über geschlossenen Reebbahnen gegeben. Anders als in der Floerhomologie kann man das Differential im Allgemeinen nicht auf Vektorräumen, die formal durch geschlossene Reeb–Bahnen aufgespannt werden, definieren. Genauer gesagt, wird es bei Existenz holomorpher Sphären mit einer (positiven) Punktierung Folgen von Zylindern (holomorphen Sphären mit je einer positiven und einer negativen Punktierung) geben, die *nicht* gegen gebrochene Zylinder konvergieren (siehe [5]). Stattdessen definiert man eine Algebra Θ_α, die durch alle geschlossenen Reeb–Bahnen erzeugt wird mit der Ausnahme solcher Vielfacher γ' einfacher Reeb-Bahnen γ mit $m(\gamma') = k$, für die $CZ(\gamma') - (n-3) - k(CZ(\gamma) - (n-3))$ ungerade ist. Bezeichne θ_γ das zur geschlossenen Reeb–bahn gehörende erzeugende Element in Θ_α. Das Differential $d_{\alpha,J}$ wird wie üblich auf den Erzeugenden der Algebra definiert:

$$d_{\alpha,J}\theta_\gamma := \sum_{\delta_1\cdots\delta_r} \frac{m(\gamma)\sharp\hat{\mathcal{M}}(\gamma;\delta_1,\ldots,\delta_r)/\mathbb{R}}{r!}\theta_{\delta_1}\cdots\theta_{\delta_r}.$$

Die Summierung erfolgt dabei nur über die Komponenten der Modulräume, $\mathcal{M}/\mathbb{R}$, die 0–dimensional sind. Kompaktheit (Satz 22) und Verklebung liefern

Satz 24. $(\theta_\alpha, d_{\alpha,J})$ *ist eine Differentialalgebra:*

$$d_{\alpha,J}^2 = 0. \qquad \square$$

5.1.2. *Funktorialität.* Die Invarianz der *Kontakthomologie*,

$$H\Theta_{M,\xi} := \mathrm{Ker} d_{\alpha,J}/\mathrm{Im} d_{\alpha,J}$$

wird über eine funktorielle Konstruktion gezeigt. Jedem (exakten) symplektischen Kobordismus (W,ω), dessen Enden symplektomorph zu den positiven bzw. negativen Hälften der Symplektisierungen $(\mathbb{R}_+ \times \overline{M}, d(e^t\overline{\alpha}))$, bzw. $(\mathbb{R}_- \times \underline{M}, d(e^t\underline{\alpha}))$ sind, zusammen mit einer kompatiblen fast komplexen Struktur J wird ein Algebrenhomomorphismus

$$\Phi_J : \Theta_{\overline{\alpha}} \to \Theta_{\underline{\alpha}}$$

konstruiert, der mit den entprechenden Differentialen verträglich ist. Sei γ eine periodische $\overline{\alpha}$–Reeb–bahn. Auf dem erzeugenden Element θ_γ ist

$$\Phi_J\theta_\gamma := \sum \frac{m(\gamma)\hat{\sharp}\mathcal{M}((\gamma;\delta_1,\dots,\delta_r)/\mathbb{R}}{r!}\theta_{\delta_1}\cdots\theta_{\delta_r}.$$

Die Summierung erfolgt über die 0–dimensionalen Komponenten der Modulräume $\mathcal{M}$, punktierter J–holomorpher Kurven mit den entsprechenden Asymptotiken.

Satz 25. *(1) Der induzierte Homomorphismus auf der Kontakthomologie*

$$\Psi_\omega := (\Phi_J)_* : H\Theta_{\xi_+} \longrightarrow H\Theta_{\xi_-}$$

hängt nur von der Isotopieklasse symplektischer Strukturen ab, deren Enden symplektomorph zu denselben Symplektisierungen sind.
(2) Seien (W_i,ω_i), $i=1,2$, zwei symplektische Kobordismen, mit $\underline{M}_1 = \overline{M}_2$ als Kontaktmannigfaltigkeiten. Bezeichne (W,ω_τ) die Familie von symplektischen Kobordismen, die man aus der Verklebung dieser beiden bekommt (siehe Abschnitt 3.4). Dann ist

$$\Psi_{\omega_\tau} = \Psi_{\omega_2}\circ\Psi_{\omega_1}.$$

Gegeben seien zwei 1–Formen α,α', die die gleiche Kontaktstruktur ξ definieren. Dann gibt es eine positive glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mt $\alpha' = f\alpha$. Seien weiterhin $m = \log\min f$ und $M = \log\max f$. Dann können wir glatte Funktionen $\eta_\pm : \mathbb{R}\times M \to \mathbb{R}$ definieren, die

$$\eta_+(s,x) = \begin{cases} \eta_+(s) = e^s & \text{für } s\le 0\\ e^{s-m}f(x) & \text{für } s \ge 1\end{cases}$$

$$\eta_-(s,x) = \begin{cases} \eta_+(s) = e^{s-M}f(x) & \text{für } s\le 0\\ e^{s} & \text{für } s \ge 1\end{cases}$$

sowie $\frac{\partial\eta_\pm}{\partial s} > 0$ erfüllen. Die symplektischen Strukturen $\omega_\pm := d(\eta_\pm\alpha)$ definieren dann exakte symplektische Kobordismen von α nach α' und umgekehrt. Die symplektischen Strukturen der Verklebungen der beiden sind isotop zur Symplektisierung $(\mathbb{R}\times M(de^t\alpha))$ bzw. $(\mathbb{R}\times M, d(e^t\alpha'))$, wobei die Enden während der Isotopie symplektomorph zu den positiven oder negativen Hälften dieser sind. Mit dem vorherigen Satz folgt daraus nun

Satz 26. *Die Kontakthomologie ist eine Invariante der zugrunde liegenden Kontaktmannigfaltigkeit.*

5.2. **Symplektische Feldtheorie.** Um Gromov–Witten–Invarianten als Endomorphismus von $H\Theta(\emptyset) \cong \mathbb{Q}$ zu verstehen (im Rahmen einer symplektisch topologischen Feldtheorie), genügt es nicht, exakte symplektische Kobordismen zu betrachten. Da man außerdem in allgemeinen symplektischen Kobordismen kein Maximumprinzip zur Verfügung hat, reicht es nicht, wie im vorigen Abschnitt, sich auf das Studium von punktierten holomorphen Sphären zu beschränken, die genau eine positive Punktierung besitzen. Die vielfältige Kombinatorik der möglichen Identifizierungen positiver und negativer Punktierungen führt zu komplizierteren algebraischen Strukturen. Diese sind interessanterweise symplektischer Natur, wobei dies nicht offensichtlicherweise mit der zugrundeliegenden symplektischen Geometrie verknüpft ist. Der interessierte Leser sei auf die ausführliche Monographie [6] verwiesen.

Zum Glück (für den Autor) muß man weder diese algebraischen Strukturen noch die ganze analytische Basis verstehen, die für die Kenntnis der Topologie der Räume punktierter holomorpher Kurven in der Nähe der oben beschriebenen Grenzwerte notwendig ist. Anstelle der vollen Beschreibung der symplektischen Feldtheorie setzen wir vielmehr eine Diskussion des allgemeinen Prinzipes, das dahinter steht. Sei $M \subset W$ eine geschlossene Hyperfläche vom Kontakttyp. Dann haben Eigenschaften einiger der unten aufgelisteten Elemente Konsequenzen für die anderen:

- Hamilton-Dynamik von M (geschlossene Bahnen, deren topologische Indizes, letztendlich die Kontakthomologie)
- Holomorphe Kurven in W (Index, Existenz, Gromov–Witten Invarianten)
- Punktierte holomorphe Kurven in $W^\pm$ (Index, Modulräume, Symplektische Feldtheorie)

Zum Beispiel folgt aus der Kompaktheit, Satz 22, folgendes Resultat von Liu und Tian [14], daß diese mit Methoden der Floer-Homologie bewiesen haben:

Satz 27. *Angenommen, für je zwei Punkte $x, y \in W$ und jede kompatible fast-komplexe Struktur gibt es eine pseudoholomorphe Späre mit fixierter Fundamentalklasse, dann besitzt jede Hyperfläche vom Kontakttyp eine geschlossene Hamilton–Bahn.*

Beweis. Wir spalten W auf und betrachten J_τ–holomorphe Sphären in W, die durch je einen fixierten Punkt in $W_0^\pm$ gehen. Da dann für den Grenzwert das Bild $\overline{F}(\overline{\Sigma})$ ebenfalls x und y enthalten muß, und $\overline{\Sigma} \cong \mathbb{CP}^1$ ist, gibt es in W^+ eine punktierte holomorphe Sphäre mit mindestens einer Punktierung. In dieser ist sie dann aber asymptotisch zu einer geschlossenen Reeb–Bahn. □

6. Holomorphe Sphären im Komplement von L

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 5. Wir werden dabei im Wesentlichen auf die Eigenschaften der Elemente der Theorie in unserer speziellen Situation zurückgreifen, die in den Beispielen erläutert wurden. Die damit verbundene Hoffnung ist, die Grundprinzipien der symplektischen Feldtheorie zu illustrieren.

Beweis des Satzes 5. Wir wählen die fast–komplexen Strukturen $J^\pm$ so, daß alle *einfachen* $J^\pm$–holomorphen Kurven (die im Falle von T^*L noch durch den Nullschnitt gehen sollten), regulär sind, d.h. die Familien solcher Kurven sind Mannigfaltigkeiten, deren Dimension genau durch die Formel (2) bestimmt sind. Es genügt dafür, die ursprünglich gewählten Strukturen $J^\pm$ auf einer nichtleeren, offenen, relativ kompakten Menge (die im Falle von J^- eine Umgebung des Nullschnittes ist) generisch zu stören. Die üblichen Argumente (siehe [17]) genügen vollkommen für unsere etwas allgemeinere Situation.

6.1. **Konstruktion der Scheiben.** Wir wählen einen Punkt $x \in L$ auf einer der beiden isolierten Geodäten und fixieren eine J^-–komplexe Gerade ξ im Tangentialraum, die keinen Tangentialvektor an L enthält. Nach Gromov gibt es dann für jedes τ genau eine J_τ–holomorphe Sphäre $f_\tau : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^2$ mit $[f] = 1 \in H_2(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z})$, mit $f_\tau(0) = x$ und $(f_\tau)_*(T_0) = \xi$. Eine Folge f_{τ_n} mit $\tau_n \to \infty$ wird nun im Sinne von Satz 22 gegen einen Grenzwert $\mathbf{F} = (F^{(1)}, ..., F^{(N)})$ konvergieren. $F^{(N)}$ enthält eine Komponente, deren Bild durch $x \in 0_L$ verläuft. Dieses hat entweder einen kuspidalen Punkt in x, oder ist dort tangential an ξ. In beiden Fällen hat diese daher mindestens drei Punktierungen: Die Wahl der tangentialen Richtung verhindert, daß sie vollständig in einem Zylinder über einer Geodäten liegt. Da $\overline{\Sigma} \cong \mathbb{CP}^1$, gibt es zu jeder dieser Punktierungen eine (andere) holomorphe Sphäre in $F^{(1)}$, $f^{(i)} : \dot{\Sigma}^{(i)} \to \mathbb{CP}^2 \setminus L$, $i = 1, 2, 3, ...$ mit genau einer negativen Punktierung. Dann setzen wir

$$D := \overline{f}^{(1)}(\Delta)$$
$$E := \overline{f}^{(2)}(\Delta).$$

6.2. **Konstruktion der holomorphen Sphären.** Mit jeder der punktierten holomorphen Kurven $f^{(i)}$ verfahren wir nun wie folgt: Wir wählen einen glatten Punkt y und eine J^+–komplexe Richtung η derart, daß eine einfache punkierte holomorphe Sphäre, die durch y verläuft, und dort tangential an η ist, mindestens 4 reelle (effektive) Deformationsparameter hat. Man beachte, daß der Grenzwert einer Folge von J_τ–holomorphen Kurven, die y enthalten, und tangential an η sind, in y glatt sein müssen, falls η nicht tangential an $f^{(i)}$ ist. Wegen Satz 23 haben die beiden Kurven in y sonst einen (lokalen) endlichen algebraischen Schnittindex, der größer als 1 ist. In einer Umgebung von y schneiden sich Paare (zusammenhängender)J_{τ_n}–holomorpher Kurven aber mit genau diesem Index. Der (totale) Schnittindex dieser Paare ist 1, was wegen der Positivität der Schnittindizes zum Widerspruch führt. Die gleiche Argumentation beweist das folgende

Lemma 28. *Jede der Komponenten des Grenzwertes ist eine einfache holomorphe Kurve, die auch nur genau einmal darin auftaucht.*

Aus der Formel (2) für die zu erwartende Dimension der Modulräume folgt, daß

$$v - dim(F^{(0)}) = 4 + \chi(\overline{\Sigma} \setminus \dot{\Sigma}^{(0)}) \tag{3}$$

Die erwartete Dimension für jede Komponente von $F^{(0)}$ ist nicht-negativ, da sie alle einfach sind, und wir J^+ so gewählt haben, daß alle einfachen punktierten holomorphen Kurven regulär sind. Da es keine kontrahierbaren Geodäten gibt, ist die Eulercharakteristik auf der rechten Seite nicht-positiv. Damit ist die Zahl der Deformationsparameter einer jeden Komponente von $F^{(0)}$ nie größer als 4. Wir erhalten folgendes

Lemma 29. *Im Falle, daß es eine Komponente in $F^{(0)}$ (und genau eine!) in einer exakt 4–dimensionalen Familie gibt, ist $N \leq 1$ und $F^{(1)}$ enthält höchstens die Annulatoren einer der beiden einfachen isolierten Geodäten.*

Beweis. Aus der obigen Diskussion folgt, daß der Teil von $\overline{\Sigma}$, der aus den Komponenten $\Sigma^{(i)}$, $i \geq 1$ besteht, eine disjunkte Vereinigung von Annuli ist. Die Ränder dieser gehören zu Paaren von Punktierungen von $\Sigma^{(0)}$, die asymptotisch zu Reeb-Bahnen derselben Geodäten mit *unterschiedlichen* Orientierungen sind. Da die erwartete Dimension jeder Komponenten von $F^{(0)}$ gerade ist, haben diese eine gerade Anzahl von Asymptotiken mit geradem Maslovindex. Das ist aber nicht möglich, wenn nach dem Zusammenfügen der Komponenten $\overline{\Sigma} \cong \mathbb{CP}^1$ sein soll, außer in dem Fall, daß es gar keine geraden Asymptotiken gibt. Weiter unten zeigen wir, daß eine holomorphe Sphäre mit zwei positiven Punktierungen, die asymptotisch zu Reeb–Bahnen von isolierten Geodäten sind, immer den Nullschnitt schneiden muß. Zudem ist jeder Zylinder, d.h. zweipunktierte Sphäre in der Symplektisierung $\mathbb{R} \times S^*L$ mit je einer positiven und negativen Punktierung, ein Zylinder über einer Reeb–Bahn (siehe Beispiel 16. Daraus folgt $N \leq 1$. □

Wir sind bei der Pointe des Beweises angekommen: Wir werden zeigen, daß ein Grenzwert, wie wir ihn hier betrachten, keine der beiden Zylinder über den isolierten Geodäten enthalten kann. Wegen Lemma 28 taucht jeder der beiden Zylinder höchstens einmal auf. Es ist nicht schwer, einzusehen, daß der Annulator jeder dieser beiden Geodäten den Nullschnitt homologisch einmal modulo 2 schneidet. Man findet zum Beispiel ein Vektorfeld auf K, das genau entlang einer Geodäten, die senkrecht auf den isolierten steht, verschwindet. Das benutze man, um den Nullschnitt zu deformieren. Dieser schneidet dann die zweipunktierte Sphäre genau einmal transversal. Andererseits kann der Nullschnitt, und damit $K \subset \mathbb{CP}^2$, von sich selbst vollständig wegbewegt werden, da es eine nirgends verschwindene geschlossene 1–Form auf der Kleinschen Flasche gibt. Da $H_2(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ mit nicht-trivialer Schnittform, heißt das, daß die Fundamentalklasse $[K] \in H_2(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}_2)$ trivial ist. Somit schneidet jede holomorphe Sphäre f_τ, K homologisch trivial. Wir erhalten, daß entweder beide Annulatoren über den isolierten Geodäten im Grenzwert vorkommen, oder gar keine! Kommen beide vor, bedeutet dies, daß der Grenzwert, die drei-oder mehrpunktierte Sphäre in T^*L in x schneiden muß. Da die Kurven verschieden sind geschieht dies mit einem (endlichen) algebraischen Schnittindex. Die Grenzkurven schneiden sich aber bereits in y mit endlichem Index. Da sich die J_{τ_n}–holomorphen Sphären zumindest für große n mit einem algebraischen Index schneiden, der *mindestens* gleich der Summe aller endlichen algebraischen Schnittindizes der Grenzkurven ist, erhalten wir einen Widerspruch.

Dann ist aber $N = 0$ und der Grenzwert ist eine holomorphe Sphäre in $\mathbb{CP}^2 \setminus L$, die $y \in u^{(i)}$ enthält und tangential zu η ist. Mit der obigen Argumentation für algebraische Schnittzahlen, sieht man sofort, daß diese keine der beiden anderen Scheiben schneiden kann. Ich bezeichne die Sphären, die ich auf diese Weise erhalte, nacheinander mit F, G und H. □

Bemerkung 30. *Die Schlußfolgerung, die wir aus der Analyse punktierter holomorpher Kurven erhalten, kann in eine Aussage umformuliert werden, die derjenigen von Nemirovski in* [20] *mehr ähnelt. Der Ausschluß eines einzelnen Annulators einer isolierten Geodäten, folgt nämlich aus der homologischen Trivialität der Kleinschen Flasche. Verschärfend kann man zeigen, daß im aufgeblasenen* $\mathbb{CP}^2$*, in der es Lagrange Einbettungen der kleinschen Flasche gibt, deren* $\mathbb{Z}_2$*–Fundamentalklasse nicht-trivial sein muß.*

Literatur

[1] Michéle Audin and Jacques Lafontaine. *Holomorphic curves in symplectic geometry*, volume 117 of *Progress in Math.* Birkhäuser Verlag, 1994.

[2] Michéle Audin, François Lalonde, and Leonid Polterovich. Symplectic rigidity: Lagrangian submanifolds. In *Holomorphic curves in symplectic geometry*, volume 117 of *Progress in Math.*, pages 271–321. Birkhäuser Verlag, 1994.

[3] Frédéric Bourgeois. A Morse–Bott approach to contact homology. *preprint*, 2002.

[4] Frédéric Bourgeois and Klaus Mohnke. Coherent orientations in symplectic field theory. *preprint, http://xxx.lanl.gov/abs/math.SG/0102095*, 2000.

[5] Yakov Eliashberg. Invariants in contact topology. *Doc. Math. J. DMV*, Extra Volume ICM 1998, 1998.

[6] Yakov Eliashberg, Alexander Givental, and Helmut Hofer. Introduction to symplectic field theory. In *Visions in mathematics–Towards 2000. Proceedings of a meeting, Tel Aviv, Israel,August 25-September 3, 1999. Part II.*, pages 560–673. Birkhäuser, 1999.

[7] Andreas Floer. Morse theory for lagrangian intersections. *J. Diff.geom.*, 18:513–517, 1988.

[8] Andreas Floer. The unregularised flow of the symplectic action. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41:775–813, 1988.

[9] Michail Gromov. Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. math.*, 82:307–347, 1985.

[10] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Properties of pseudoholomorphic curves in symplectizations IV: asymptotics with degeneracies. In *Contact and symplectic geometry*, number 8 in Publ. Newton Inst., pages 78–117. Cambridge University Press, 1996.

[11] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Pseudoholomorphic curves in symplectizations I: Asymptotics. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Nonlinéaire*, 13(3):337–379, 1996.

[12] H. Hofer and E Zehnder. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhäuser Advanced Texts, Baseler Lehrbücher. Birkhäuser, 1994.

[13] Helmut Hofer. Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three. *Invent. Math.*, 114:515–563, 1993.

[14] Gang Liu and Gang Tian. Weinstein conjecture and gw-invariants. *Commun. Contemp. Math.*, 2(4):405–459, 2000.

[15] Dusa McDuff. Singularities and positivity of intersections of J–holomorphic curves. In *Holomorphic curves in symplectic geometry*, volume 117 of *Progress in Math.*, pages 191–215. Birkhäuser Verlag, 1994.

[16] Dusa McDuff and Salamon Dietmar. *Introduction to symplectic topology.* Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, Oxford, 1994.

[17] Dusa McDuff and Salamon Dietmar. *J–holomorphic curves and Quantum Cohomology*, volume 6 of *University Lecture Series.* American Math. Soc., 1994.

[18] Mario J. Micallef and Brian White. The structure of branch points in minimal surfaces and in pseudoholomorphic curves. *Annals of Mathematics*, 139:35–85, 1994.

[19] Klaus Mohnke. Symplectic threadings through Lagrangian eyes. *preprint, http://xxx.lanl.gov/abs/math.SG/0106139*, 2001.

[20] Stefan Nemirovski. Lefschetz pencils, Morse functions, and Lagrangian embeddings of the Klein bottle. *Izvestia Math.*, 66(1):151–164, 2002.

[21] Joel Robbin and Dietmar Salamon. The Maslov index for paths. *Topology*, 32(4):827–844, 1993.

[22] Matthias Schwarz. Cohomology operations from S^1–cobordisms in Floer homology. Technical report, ETH Zürich, 1995.

[23] Claude Viterbo. A new obstruction to embedding Lagrangian tori. *Invent. Math.*, 100:301–320, 1990.

Klaus Mohnke, Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik