11. Juni

Lange Nacht der Wissenschaften 2005

Alles relativ...

Differentialgeometrie im Spannungsfeld von Mathematik & Physik

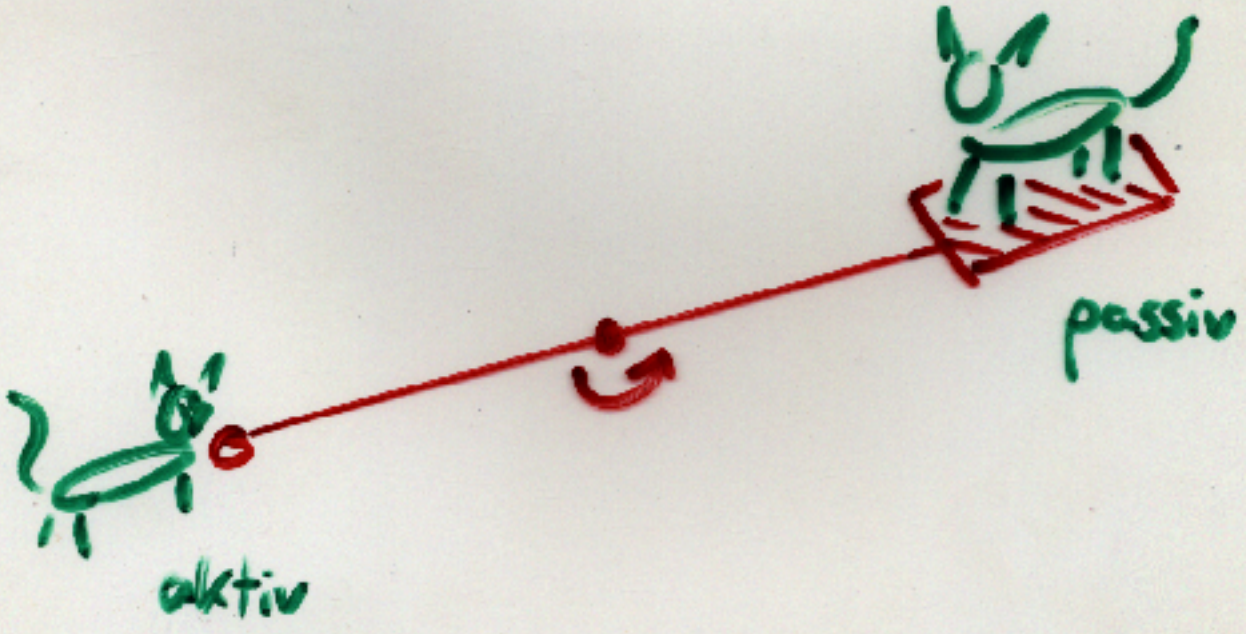
Thomas Newkirchner
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität

Fragen:

- Ist denn noch nicht alles entdeckt in der Mathematik?
- Reicht es nicht, wenn es Computer berechnen/visualisieren können?
- Wie geht man mit folgendem Gegensatz um:

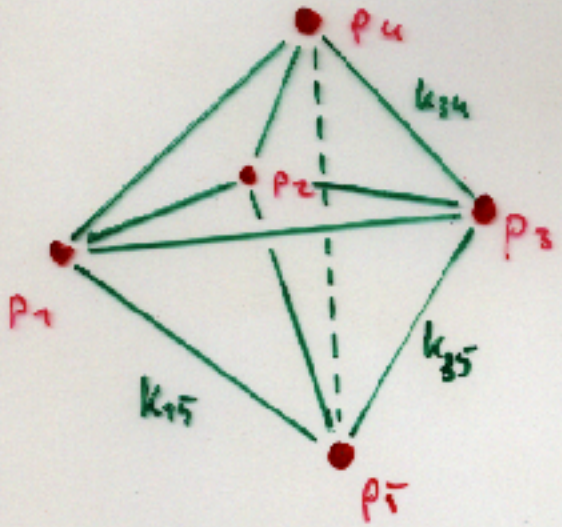
  Erfolg/Popularität der ART ⟷ Geringes Wissen um Inhalte der ART

- Was unterscheidet Physiker und Mathematiker?



Geometrie: Modell & Erfahrung

Euklidische Geometrie

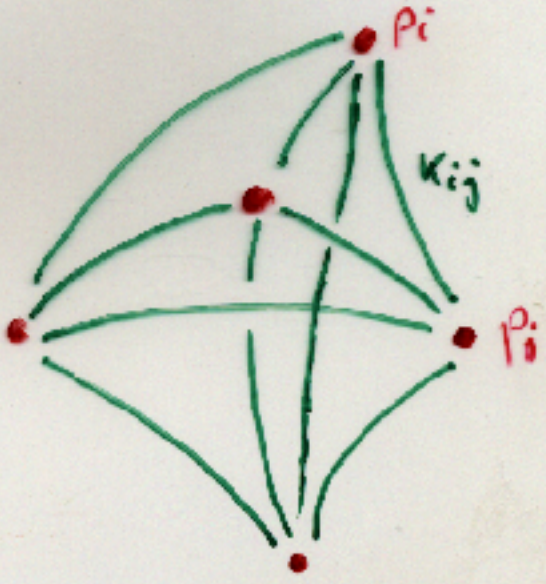


$\frac{n(n-1)}{2}$ Abstände $k_{ij} = |p_i - p_j|$

⇝ Rechnung: die k_{ij} sind nicht alle unabhängig voneinander:

Punkte	Abstände	Relationen
3	3	0
4	6	0
5	10	1
6	15	3
⋮	⋮	⋮

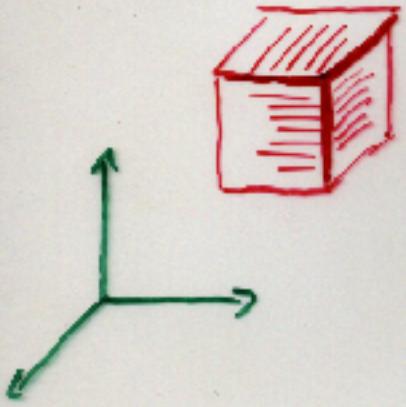
physikalische Realität

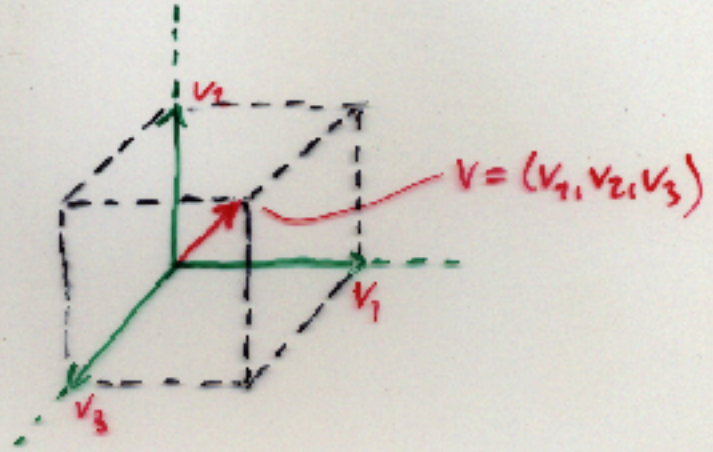


können $\frac{n(n-1)}{2}$ Abstände messen

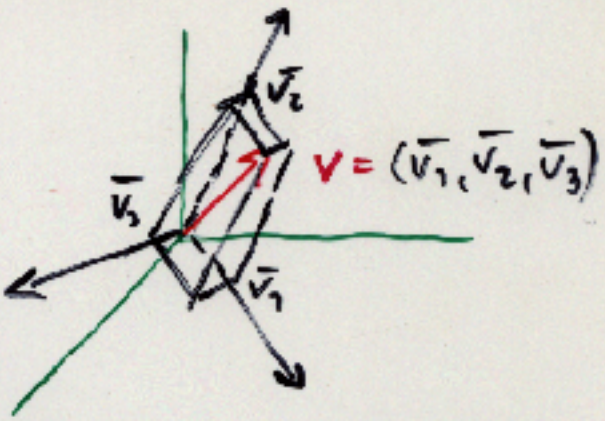
(Gedankenexperiment von Helmholtz, Messung von Gauss, wir jeden Tag...)

Objekt ↔ Koordinaten



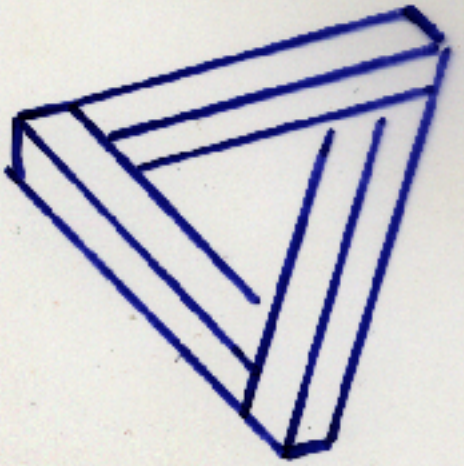


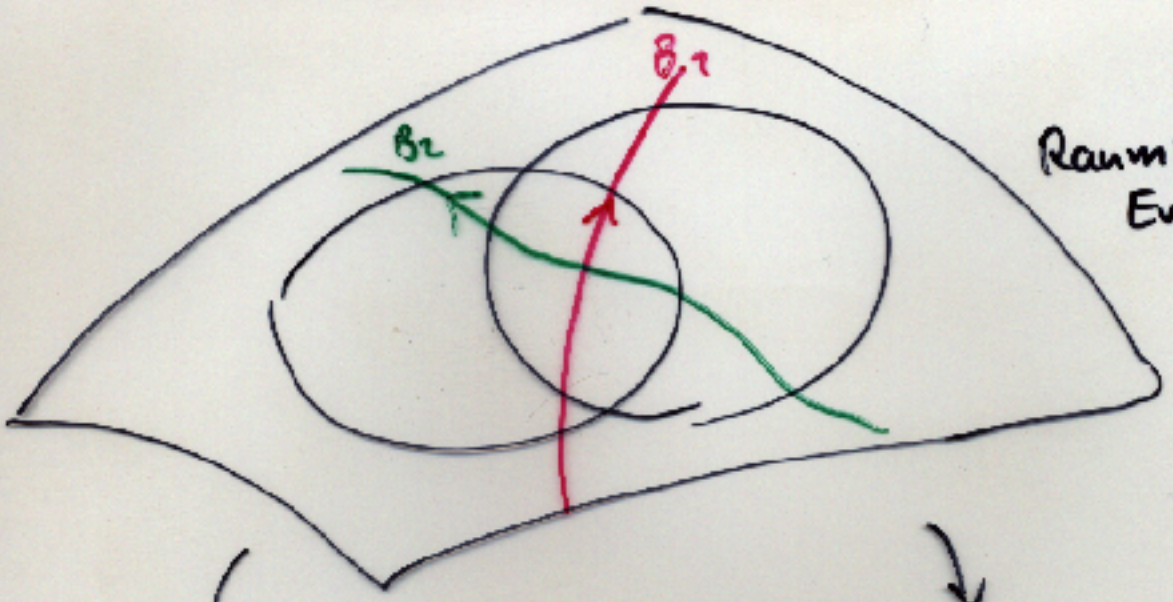
Verhalten bei: Drehen / Koordinatentransformation:



$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

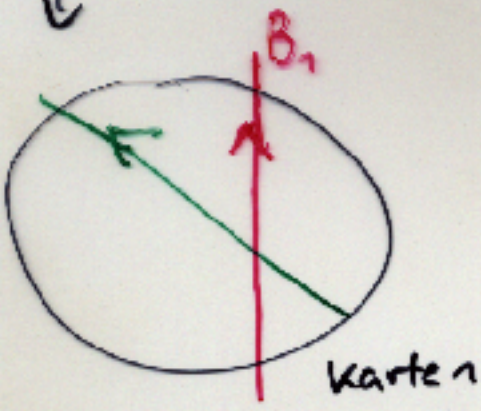
oder $\bar{v}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} v_j$



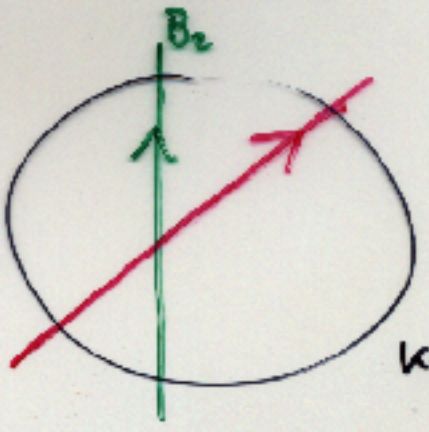


Raumzeit-Ereignisse

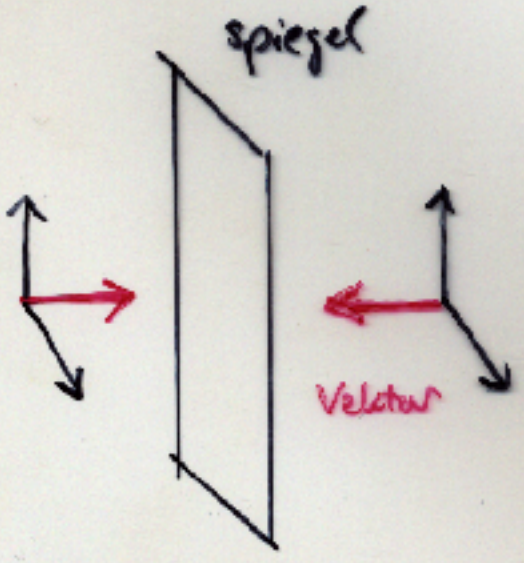
(Newton, ... Einstein, ...)

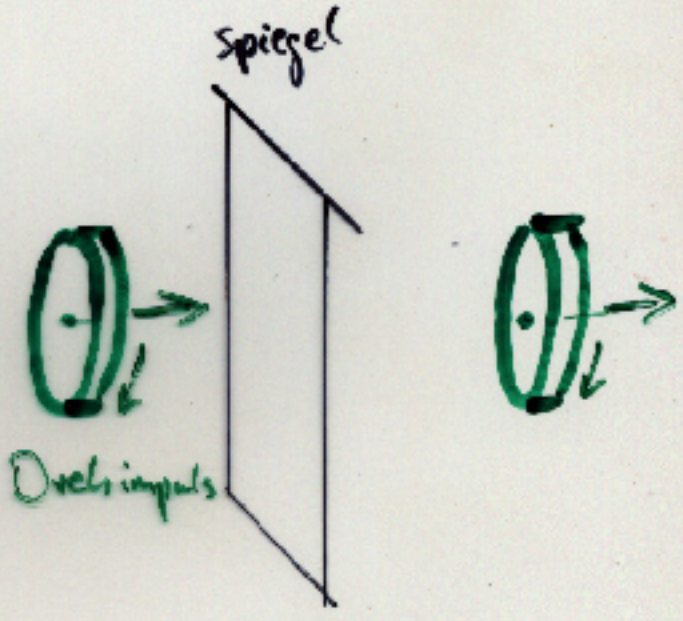


Karte 1



Karte 2

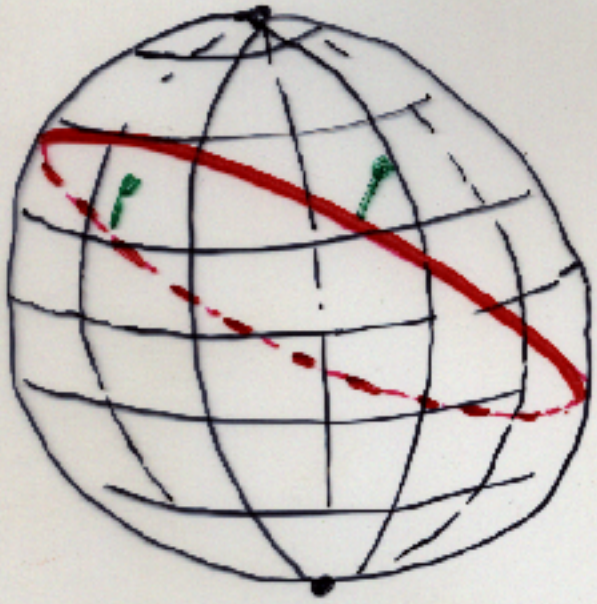


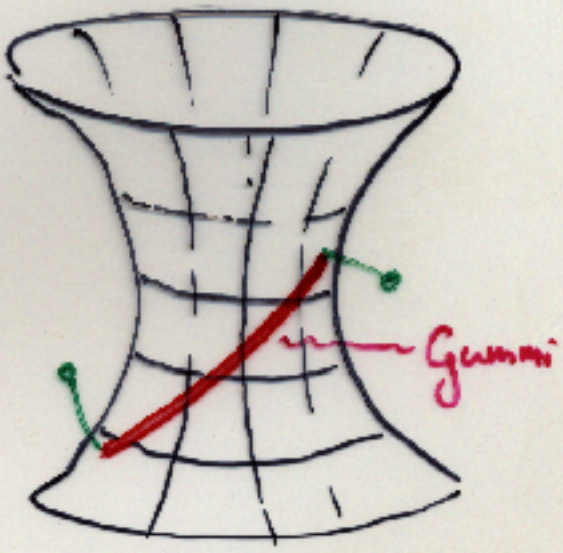


Fazit: Der Drehimpuls verhält sich nicht wie ein Vektor (math.: Bivektor)

Geodäten

- als kürzeste Verbindung:

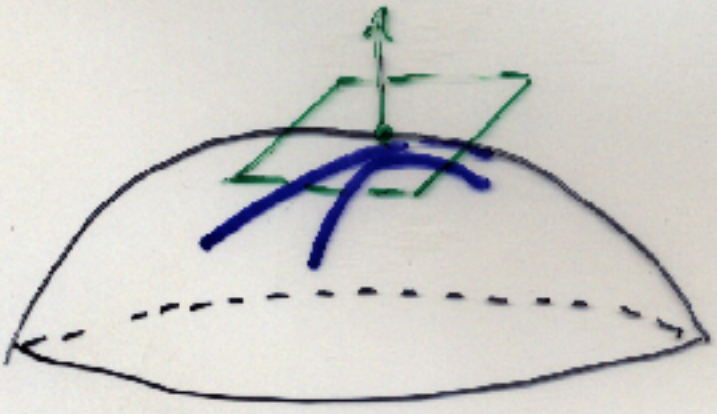




Navigation:

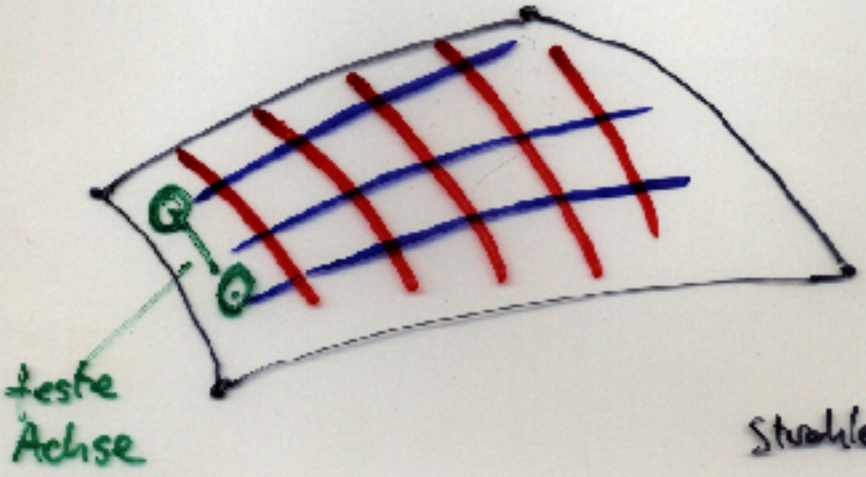
cos (Fahrtrichtung) · cos (Breitengrad) = konstant

- am wenigsten gekrümmt:



Stab zwischen zwei Kugelschalen eingeklemmt.

- am frontalsten:



Strahlen & Wellenfronten

Bisher: Laufen immer "geradeaus"

Jetzt: Laufen beliebig, merken uns aber, wo "geradeaus" ist.

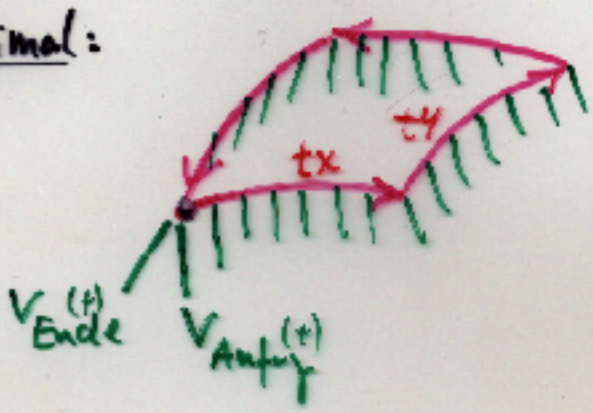
(Kompass)

Frage: Wie kann man dies physikalisch messen?

Antwort: Foucault'sches Pendel / Hantel

Krümmung:

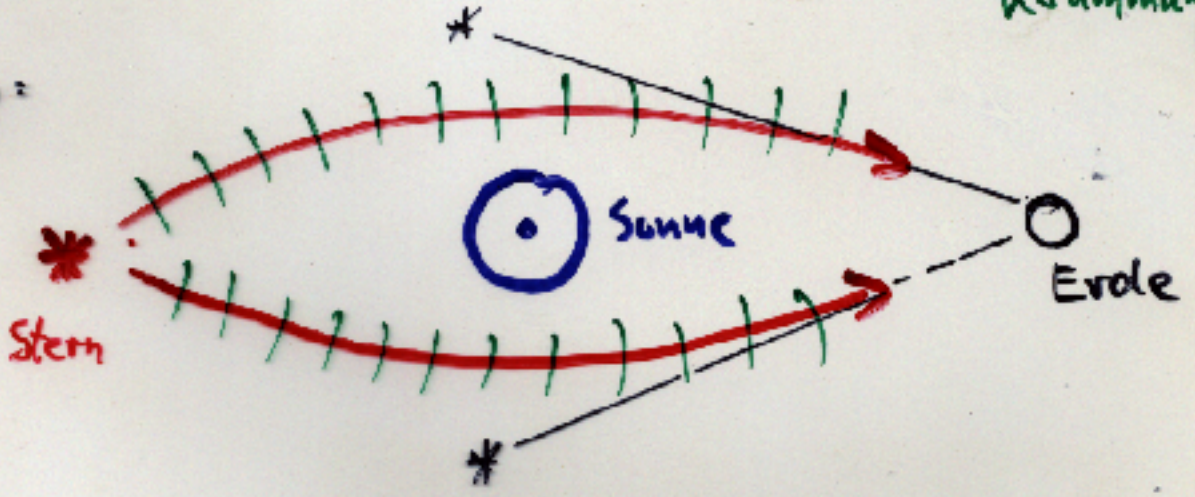
Infinitesimal:



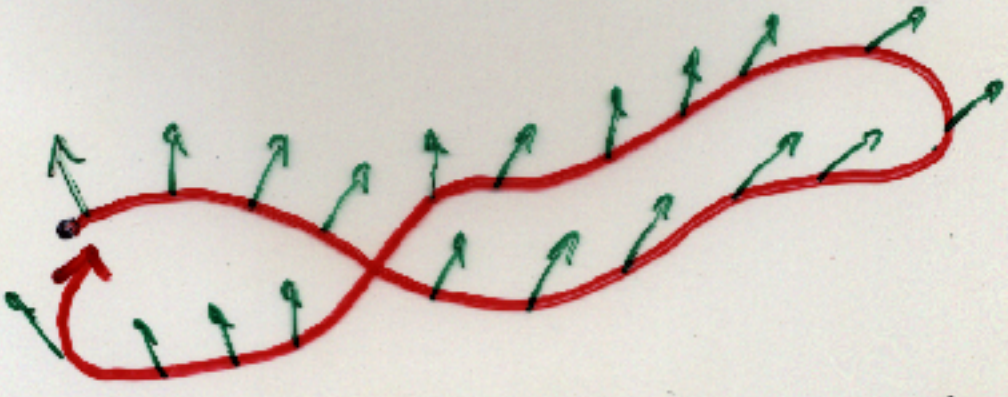
$$V_{Ende} - V_{Anfang} \approx \text{Fläche (Parallelogr.)} \cdot R(X,Y)$$

↑ Krümmung

Bsp:



Global:



→ liefert Informationen über die globale Struktur des Raumes