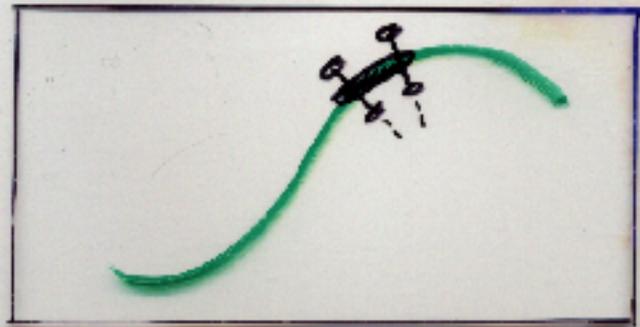


(A) Krumme Kurven in geraden Räumen

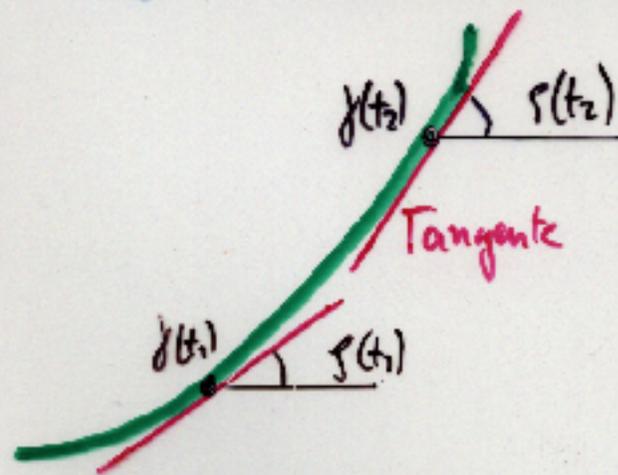
Teil 2006

Ebene - \mathbb{R}^2 :



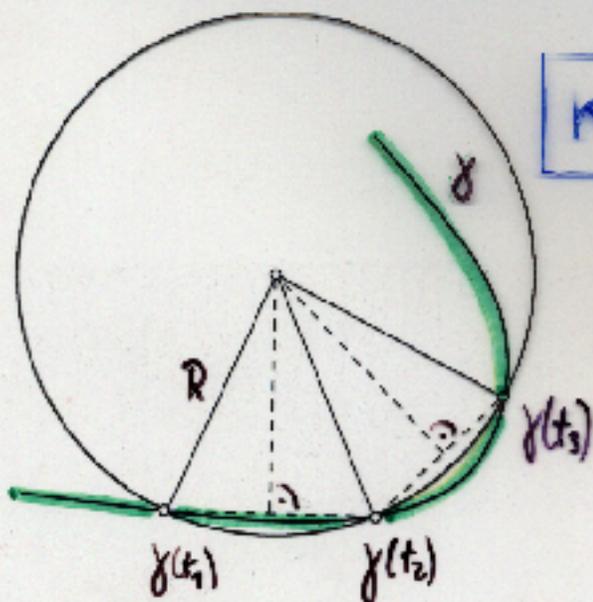
Krümmung als ...

... Änderung des Tangentenwinkels / Weg:

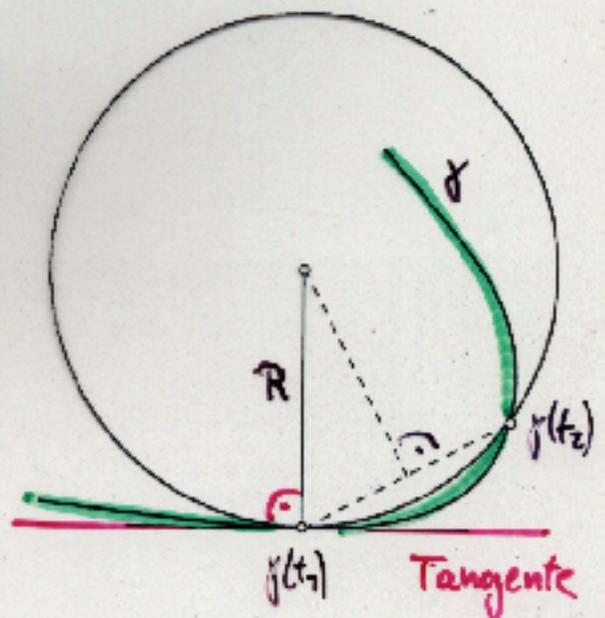


$$\kappa = \varphi' = \frac{d\varphi}{ds}$$

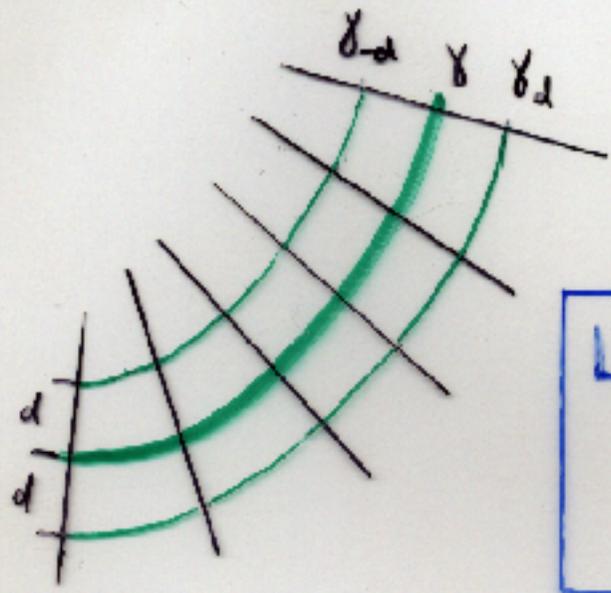
... Kehrwert des Schmiegkreisradius:



$$\kappa = \frac{1}{R}$$



... Länge von Parallelkurven:



L = Länge einer Kurve

$$L(\gamma_d) = L(\gamma) + d \int \kappa dt$$

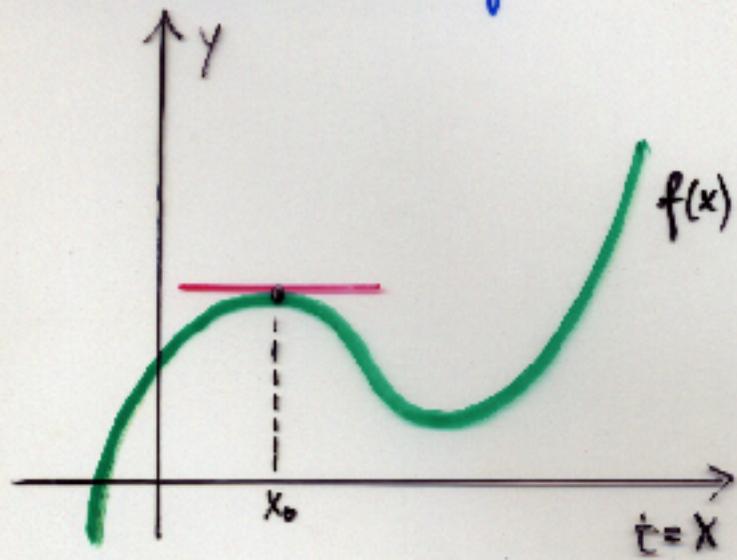
$$= (1 + d\kappa) L(\gamma)$$

↑
κ konst.

z.B. beim Kreis: $L(K_{R+d}) = 2\pi(R+d)$

$$= (1 + d \frac{1}{R}) L(K_R)$$

... Zweite Ableitung:



$$f'(x_0) = 0, \text{ dann:}$$

$$\kappa(x_0) = f''(x_0)$$

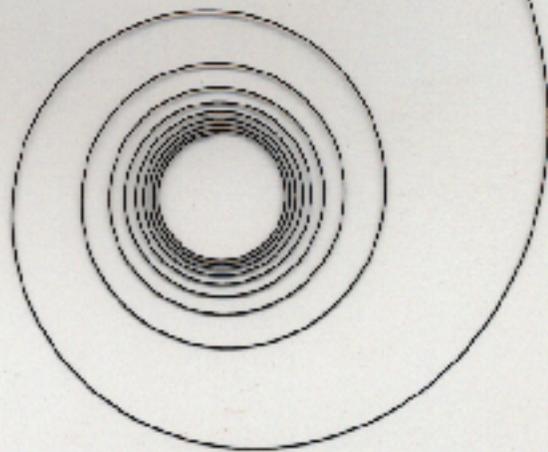
allg: $\kappa = \frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}^{3/2}}$

Ebene Kurven werden eindeutig (bis auf Bewegung) durch ihre Krümmung κ beschrieben.

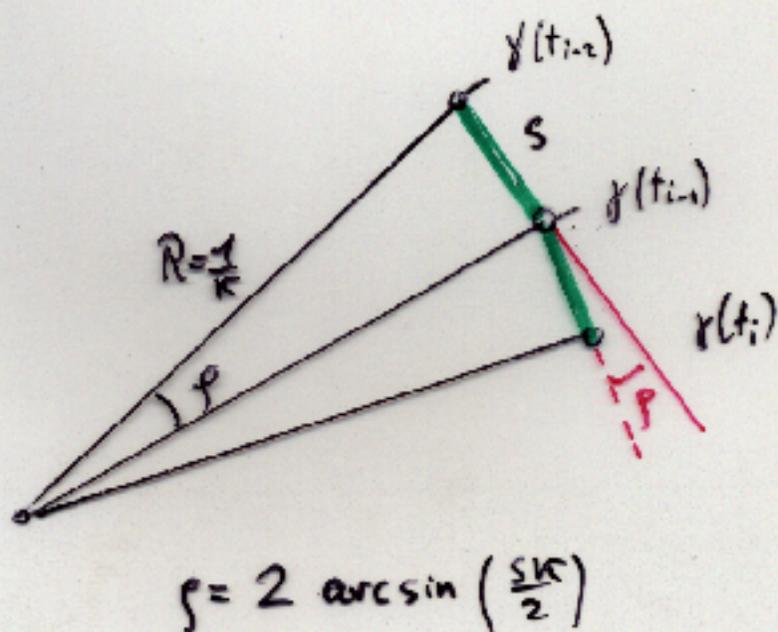
Bsp: Klothoide - Straßenbauerkurve:

Eigenschaft:

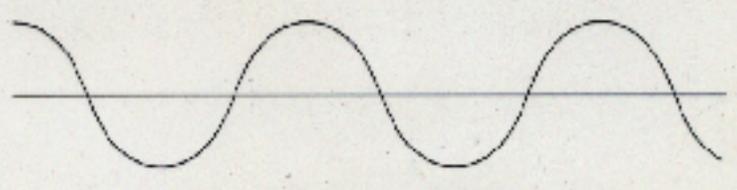
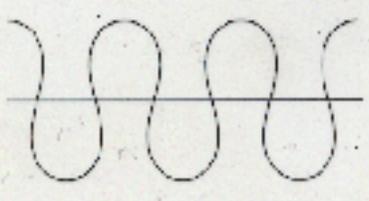
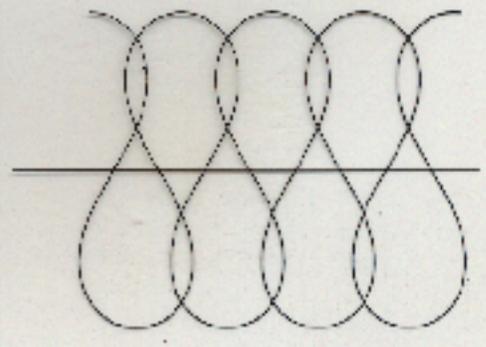
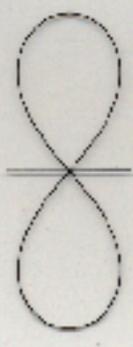
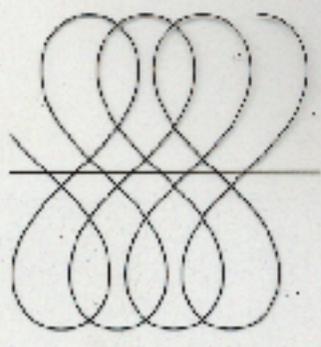
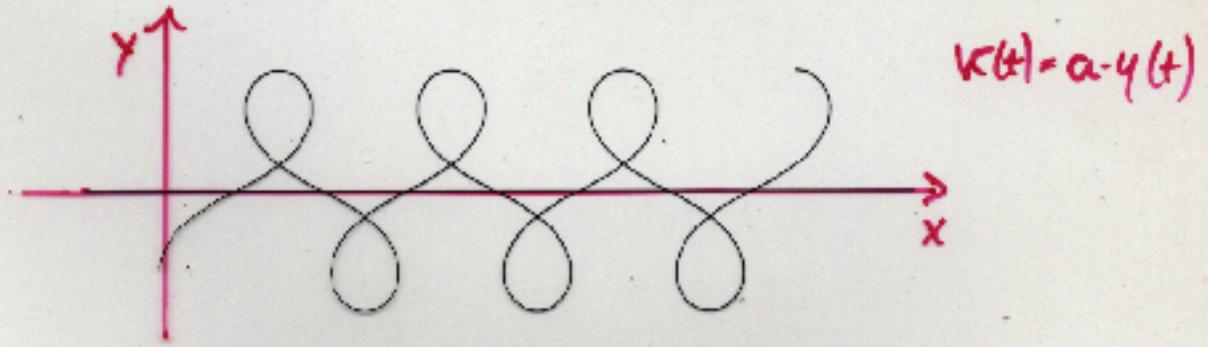
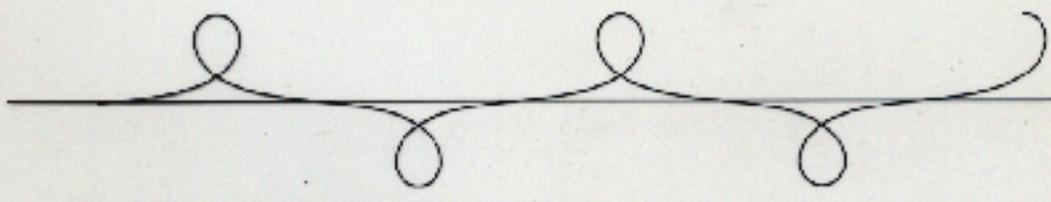
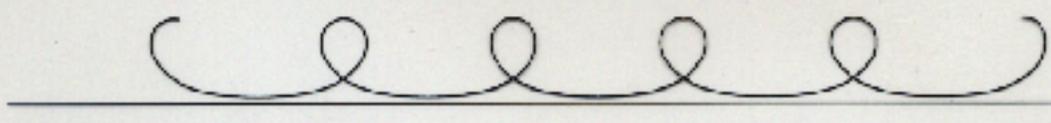
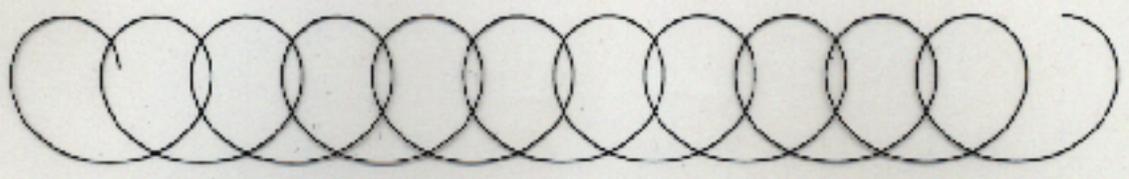
$$K(t) = at + b$$



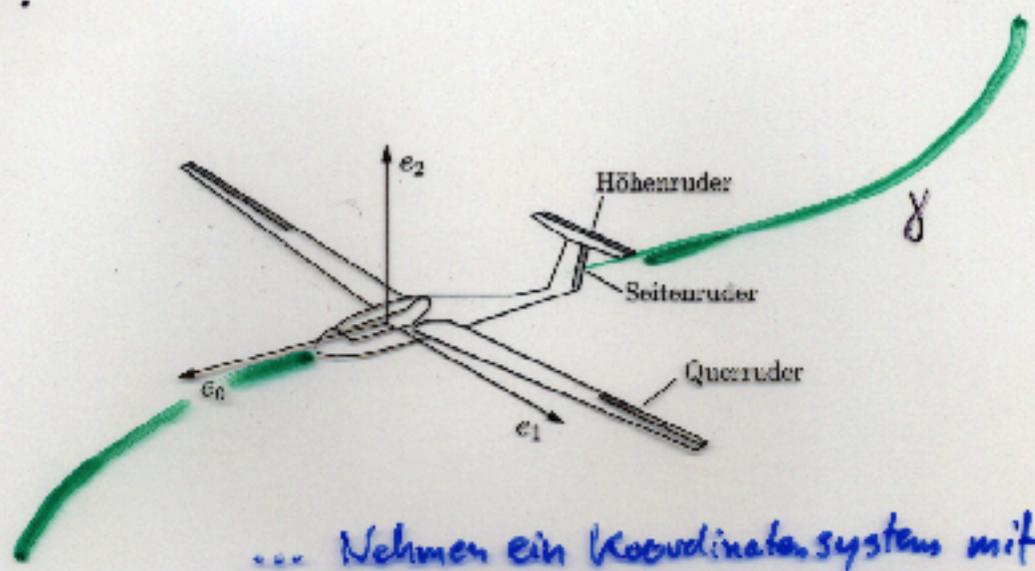
Konstruktion mit dem Computer:



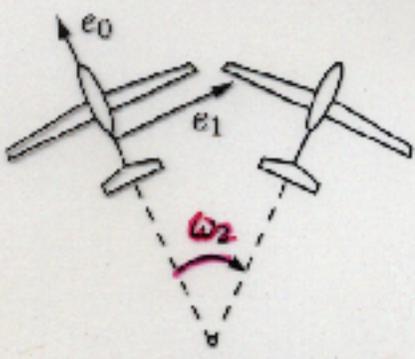
Elastische Kurven - Minimieren $\int \kappa^2(t) dt$
 (verbinden von Schienen Strängen $\hat{=}$ $\hat{=}$)



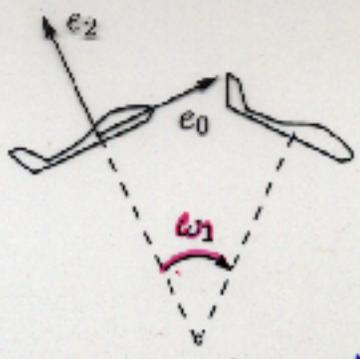
Raum- \mathbb{R}^3 :



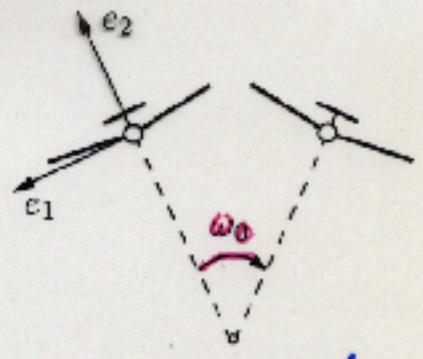
... Nehmen ein Koordinatensystem mit
 \rightarrow 3 freie Bewegungsparameter:



Gier (yaw)
Seitenruder



Nicken (pitch)
Höhenruder

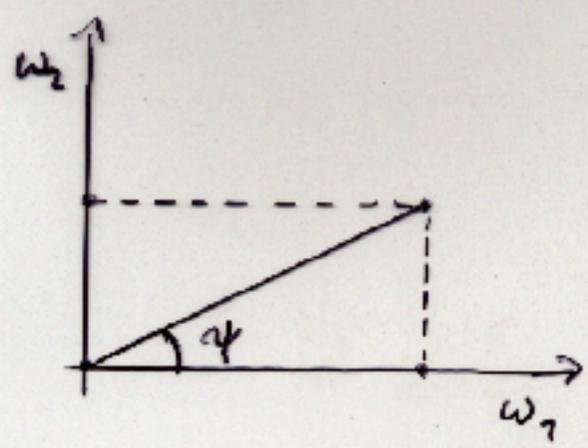


Kippen (roll)
Querruder

3 Parameter - 1 Freiheitsgrad = 2 geometrische Invarianten:

$\kappa = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ <p>Krümmung</p>	$\tau = \omega_0 + \psi'$ <p>Torsion</p>
---	--

wobei:



... Können (meistens) ohne Seitenrudern fliegen :

$$\omega_2 = 0 \quad \text{also} \quad \kappa = |\omega_1|$$

$$\tau = \omega_0$$

... Können (immer) ohne Querrudern fliegen :

$$\omega_0 = 0$$

Räumliche Kurven werden eindeutig (bis auf Bewegung) durch Krümmung κ und Torsion τ beschrieben.



$\omega_2 \neq 0$

nicht verbogen in Richtung e_1
aber verdreht

Hohe Biegesteifigkeit



$\omega_0 = 0$

nicht verdreht
aber verbogen

Hohe Windungssteifigkeit

Geometrie von Seilen, DNA-Molekülen...

... betrachten Seil:



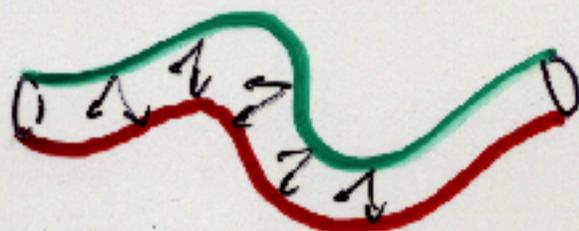
$$\omega_0 = 0$$

... widerstrebt Verwindung:



$$\omega_0 \neq 0$$

... läßt sich verbiegen:



$$\omega_1, \omega_2 \neq 0$$

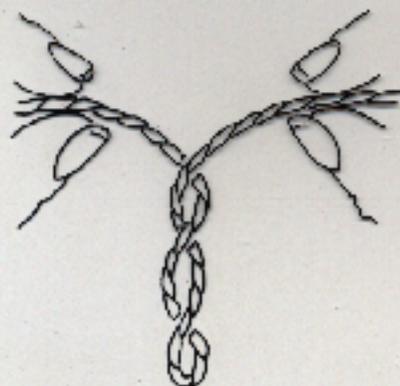
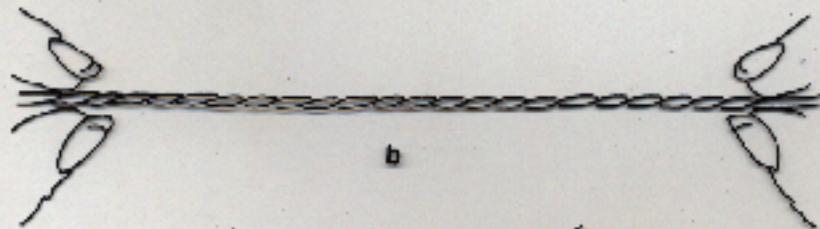
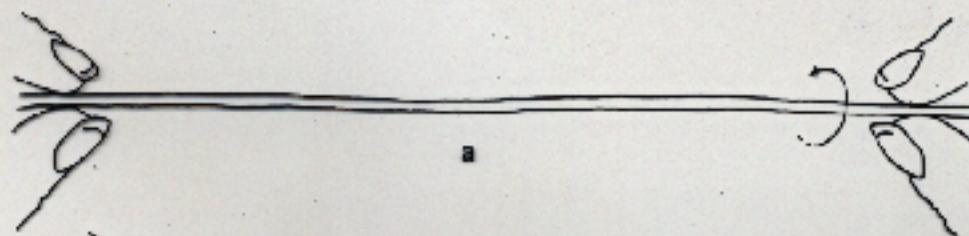
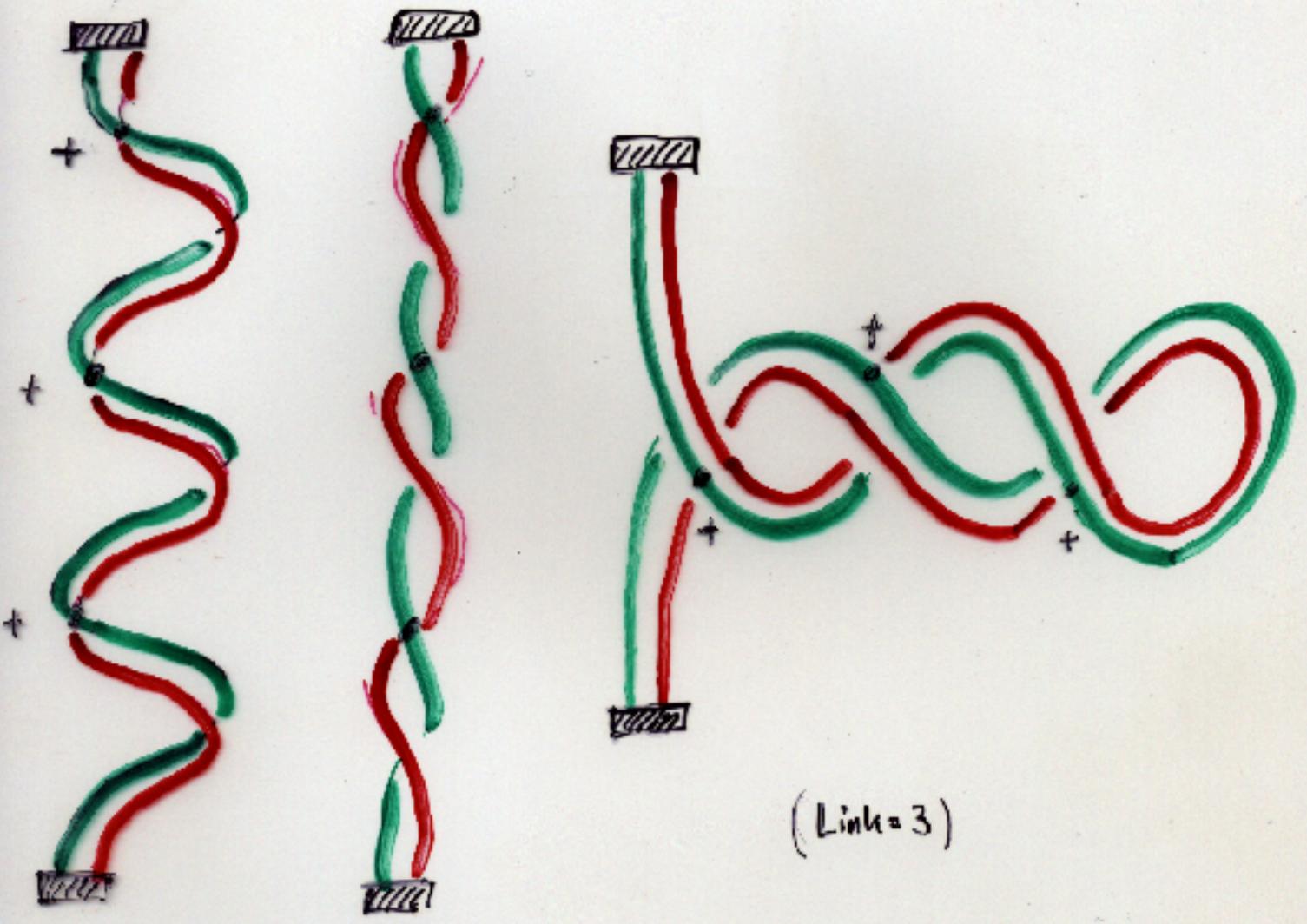


Figure 2

Pohl '80



Es gilt (Călugăreanu, Fuller, White) :

(Link) (writhe) (twist)
 Verschlingung = Verwringung + Verwindung

$$\sum \sigma(\begin{matrix} \nearrow \\ \nwarrow \end{matrix}) + \sum \sigma(\begin{matrix} \nwarrow \\ \nearrow \end{matrix}) + \sum \sigma(\begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \\ \nwarrow \\ \nwarrow \end{matrix})$$

(gemittelt über alle Blickrichtungen) global lokal

wobei $\sigma(\begin{matrix} \nearrow \\ \nwarrow \end{matrix}) = +1$

$\sigma(\begin{matrix} \nwarrow \\ \nearrow \end{matrix}) = -1$

$Twist = \int \omega_0 dt$



Figure 4. Electron micrograph of supercoiled circular DNA, a plasmid of *Halobacterium halobium*. Molecular weight: 10^6 ; 150,000 base pairs. Magnification 70000x. For details see [10]. (Courtesy of Prof. Günther Klotz).

Bsp: geschlossene DNA (z.B. in Mitochondrien):

- Link ist fest (ohne Einwirken von Topomerase)
- Twist ändert sich, je nach chemischen Milieu,
kann aber nicht direkt beobachtet werden!



⇒ Änderung von Twist kann man an Writhe ablesen:



$$Wr = 0$$

$$Tw = X$$



$$Wr = 3$$

$$Tw = X - 3$$