Normalform eines schief- oder selbstadjungierten Endomorphismus auf einem Pseudo-Euklidischen oder Symplektischen Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

- Eine Arbeit von Charles Boubel -

Thomas Neukirchner*

Inhaltsverzeichnis

1.1 Einleitung 3

1.2 Jordansche Normalform 5

1.3 Charakteristische Unterräume für selbst- oder schiefadjungierte Operatoren 8

1.4 Eine Normalform von (a, B) für nilpotentes B 11

2 Normalformen für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 18

2.1 B sei a-selbstadjungiert 19

2.2 B sei a-schiefadjungiert 19

3 Normalformen für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 21

3.1 B sei a-selbstadjungiert 21

3.2 B sei a-schiefadjungiert 23

4 Zusammenfassung 26

*e-mail: neukirch@mathematik.hu-berlin.de - 10. September 2002

1.1 Einleitung

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Weiterhin fixieren wir einen involutiven Körperautomorphismus $(\mathbb{K}, ^*)$, d.h. $^* = id$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $^* \in \{id, ^-\}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für eine bilineare/sesquilineare Abbildung $a : V \times V \to \mathbb{K}$ (d.h. a additiv, $a(\lambda\cdot, \cdot) = \lambda a(\cdot, \cdot)$ und $a(\cdot, \lambda\cdot) = \lambda^* a(\cdot, \cdot)$, $\lambda \in \mathbb{K}$) - kurz *Form* - definieren wir die Invarianzgruppe $\boldsymbol{stab(a) := \{g \in GL(V) \,|\, a(gx, gy) = a(x, y), \forall\, x, y \in V\}}$. Wir beschränken uns auf solche Formen die einen symmetrischen Orthogonalitätsbegriff induzieren (d.h. $x \perp y \;\Leftrightarrow\; y \perp x$). Das sind die sogenannten

Reflexive Formen

Typ und Bezeichnung	Eigenschaft	$stab(a)$ (a nicht ausgeartet)
$S_2{}^*(V) = \begin{cases} S_2(V) & Symmetrisch \\ \overline{S_2}(V) & Hermitisch \end{cases}$	$a(x, y) = a(y, x)^*$	$O(p, q),\ O(\mathbb{C})$ $U(p, q)$
$\Lambda_2{}^*(V) = \begin{cases} \Lambda_2(V) & Schief - Symmetrisch \\ \overline{\Lambda_2}(V) & Schief - Hermitisch \end{cases}$	$a(x, y) = -a(y, x)^*$	$Sp(2n, \mathbb{K})$ $U(p, q)$

(Siehe [Hei90, Kap.1,§3-§5]). Die schief-Hermitischen Formen sind hier nur zu Gunsten einer einheitlichen Formulierung erwähnt, denn ist $a \in \overline{\Lambda_2}(V)$ so ist $i \cdot a \in \overline{S_2}(V)$. Wir betrachten im Folgenden ein Paar $a, b \in S_2{}^*(V) \cup \Lambda_2{}^*(V)$ (zur Erinnerung: die Konjugation * ist fixiert). Weiterhin setzen wir voraus, dass a nicht ausgeartet ist. Dann induziert b einen linearen Operator B mittels:

$$a\big(B(x), y\big) = b(x, y), \quad \forall\, x, y \in V \quad \text{(Riesz)}$$

und es gilt

$$a, b \left\{ \begin{array}{l} \text{vom gleichen Typ} \\ \text{von komplementären Typ} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad B \text{ ist } \left\{ \begin{array}{l} a - \textit{selbst}\text{adjungiert} \\ a - \textit{schief}\text{adjungiert} \end{array} \right\}$$

Aus dieser Sicht sind die gegebenen Daten also ein pseudo-Euklidischer oder symplektischer Vektorraum (V, a) mit einem selbst- oder schiefadjungierten Operator B. Es erheben sich folgende Fragen:

1. Bestimme die Invarianten des Paares (a, b) und leite daraus eine simultane Normalform für (a, b) her. Eine Basis in V, die die Normalform realisiert bezeichnen wir als *angepasst*.

2. Finde einen Algorithmus zur Gewinnung der Normalform.

3. Bestimme die Struktur von $\Omega = stab(a) \cap stab(b)$. Diese Gruppe wirkt einfach transitiv auf den angepassten Basen.

4. Bestimme die bzgl. (a, b) "intrinsisch" gegebenen (d.h. Ω-invarianten) Unterräume.

1.1 Beispiel. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, a reflexiv und positiv definit (d.h. a symmetrisch im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und hermitisch im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), b vom selben Typ wie a. In diesem Fall ist die Antwort auf oben gestellte Fragen im wesentlichen der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren:

1. V besitzt eine ON-Basis aus Eigenvektoren von B. Die einzigen Invarianten in dieser Situation sind also die Eigenwerte $spec(B) = \{\lambda_1, \dots \lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ von B und die Dimension der zugehörigen Eigenräume $Eig^B(\lambda_i)$. Die genannte ON-Basis ist folglich bereits angepasst.

2. Der Algorithmus zur Bestimmung einer angepassten Basis ist die sogenannte *Hauptachsentransformation*. Es wird dabei im wesentlichen von der Tatsache gebrauch gemacht, dass jeder Eigenvektor ein B-invariantes orthogonales Komplement mit sich bringt (a pos. definit) für das wir die geforderte Basis als gegeben vorraussetzen können (vollst. Induktion).

3. $g \in \Omega \;\Rightarrow\; a(gB(x), g(y)) = a(B(x), y) = b(x, y) = b(g(x), g(y)) = a(Bg(x), g(y))$, d.h. $[g, B] = 0$. Daraus folgt die Invarianz der Eigenräume $Eig^B(\lambda_i)$ unter Ω und es ist nun offensichtlich, dass
$$\Omega = \prod_{i=1}^{k} O\left(Eig^B(\lambda_i), a\right)$$

4. Die Ω-invarianten Unterräume sind orthogonale direkte Summen der Eigenräume:
$$\bigoplus_{i \in I \subset \{1,\dots,k\}} Eig^B(\lambda_i)$$

Der zweite Punkt im vorhergehenden Beispiel weist auf den ursächlichen Unterschied zum allgemeinen Fall hin: Ist a nicht positiv definit, so kann ein Eigenvektor v isotrop sein. $v^\perp$ ist dann zwar immernoch B-invariant aber nicht mehr ein Komplement zu $span\{v\}$.

Es wird sich zeigen dass ein isotroper Eigenvektor, der zu allen anderen Eigenvektoren orthogonal ist, notwendigerweise einen nicht-trivialen Jordanblock von B vorraussetzt. Damit entsteht eine enge Beziehung zwischen der Dimension eines maximal a-isotropen Unterraumes und der Anzahl und Länge möglicher Jordanblöcke von B. Weiterhin geht im allgemeinen die Reellität des Spektrums von B verloren ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Beispiele für das Auftreten des Tripels (V, a, b) in der Differentialgeometrie: Als (reeller) Vektorraum V tritt in diesen Kontext kanonisch ein fixierter Tangentialraum T_oM einer Mannigfaltigkeit M in Erscheinung. Für die nichtausgeartete reflexive Form a betrachten wir die Einschränkung einer gegebenen pseudo-Riemannschen

Metrik g auf T_oM. Als b bzw. B können nun weitere geometrische (aus g abgeleitete) Grössen herangezogen werden z.B. der Ricci-Tensor $\mathcal{R}ic_o$, der Jacobi-Operator $J_X(Y) = \mathcal{R}_o(Y,X)X$ (g_o-selbstadjungiert) bzw. $B \in \mathfrak{R}_o \subset \mathfrak{hol}_o \subset \mathfrak{so}(T_oM, g_o)$, d.h. ein Element aus dem Raum der Krümmungs-Endomorphismus oder der Holonomiealgebra-Darstellung (g_o-schiefadjungiert).

Ist g eine Riemannsche Metrik und b symmetrisch, so kommt sofort der Spektralsatz aus Beispiel 1.1 zum tragen, wohingegen die Behandlung des allgemeinen - also insbesondere des Pseudo-Riemannschen Falls die Zielstellung der Untersuchungen von W.Klingenberg [Kli54] und Ch.Boubel [Bou00] ist.

1.2 Jordansche Normalform

Wie bereits erwähnt muss für B eine allgemeine Jordan-Zerlegung in Betracht gezogen werden. Daher sei an dieser Stelle eine kurze Zusammenfassung der allgemeinen Theorie eingefügt. Eine gute Referenz ist z.B. [Koe85]. Sei im Folgenden $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in End(V)$. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

- $\chi_f(x) := \det(x \cdot id_V - f) = \prod_{i=1}^k P_i^{m_i}(x) \in \mathbb{K}[x]$ das **charakteristische Polynom** mit seiner (normierte) Primfaktorzerlung. ($\mathbb{K}[x]$ ist faktoriell).
- $\mu_f(x) := \prod_{i=1}^k P_i^{n_i}(x)$ das (normierte) **Minimalpolynom** definiert als Erzeugendes Element des Ideals $\langle \mu_f \rangle = \ker\{p \in \mathbb{K}[x] \mapsto p(f) \in End(V)\} \subset \mathbb{K}[x]$. ($\mathbb{K}[x]$ ist ein Hauptidealring und nach dem Satz von Caley-Hamilton gilt $\chi_f \in \langle \mu_f \rangle$).
- $H_f(\lambda, i) := \ker(\lambda \cdot id_V - f)^i$ der ***i*-te Hauptraum bzgl. $\boldsymbol{\lambda}$**

1.2 Proposition. *Sei $f \in End(V)$* zerfallend *d.h. $P_i(x) = (x - \lambda_i)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $(i = 1, \ldots, k)$. Dann gilt:*

(i) $H_f(\lambda_i) := H_f(\lambda_i, n_i) = H_f(\lambda_i, q) \quad \forall\, q \geq n_i$

(ii) $V = \bigoplus_{i=1}^k H_f(\lambda_i)$

(iii) Die Projektion $p_{\lambda_i} : V \to H_f(\lambda_i)$ bzgl. der Zerlegung aus (ii) lässt sich darstellen als Polynom in f.

(iv) **Jordan-Chevaley-Zerlegung:** *$f_S = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot p_{\lambda_i}$ ist halbeinfach, $f_N = f - f_S$ ist nilpotent und es gilt:*

$$f_S, f_N \in \mathbb{K}[f], \quad \textit{d.h. insbesondere:} \quad [f_S, f_N] = 0$$

Sei $f = \widetilde{f_S} + \widetilde{f_N}$ eine weitere Zerlegung mit $\widetilde{f_S}$ halbeinfach, $\widetilde{f_N}$ nilpotent und $[\widetilde{f_S}, \widetilde{f_N}]$ dann gilt bereits $\widetilde{f_S} = f_S$, $\widetilde{f_N} = f_N$.

Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt jeder Endomorphismus über einem komplexen Vektorraum. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ muss das nicht der Fall sein. Folgende Begriffe verbinden dabei komplexe und reelle Vektorräume:

- **Reellifizierung:** Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Mit der kanonischen Einbettung $j : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ wird $(V_{\mathbb{R}}, +) = (V, +)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum:

$$a \cdot x = j(a) \cdot x, \quad a \in \mathbb{R},\ x \in V = V_{\mathbb{R}}$$

- **Komplexe Struktur:** Sei V_0 ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $I \in End(V_0)$ mit $I^2 = id_{V_0}$, dann wird $(V_0^c, +) = (V_0^c, +)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum:

$$\alpha \cdot x = Re(\alpha)x + Im(\alpha)I(x), \quad \alpha \in \mathbb{C},\ x \in V_0 = V_0^c$$

- **Komplexifizierung:** Sei V_0 ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Setzte $(V_0)_{\mathbb{C}} = V_0 \oplus V_0$ und betrachte $I \in End(V_0 \oplus V_0), I(x, y) = (-y, x)$. Folglich ist I eine komplexe Struktur auf $(V_0)_{\mathbb{C}}$.

- **Reelle Struktur:** Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\kappa : V \to V$ mit $\kappa^2 = id_V$ und $\kappa(\alpha x) = \overline{\alpha}\kappa(x)$. Wir benutzen auch die Bezeichnung $\overline{x} := \kappa(x)$. Dann ist der Eigenraum $V^R = Eig_\kappa(+1)$ ein $\mathbb{R}$-Unterraum in $V_{\mathbb{R}}$.

Es bestehen folgende Vektorraum-Isomorphismen:

- $(V_{\mathbb{R}})^C \simeq V$, bzgl. der komplexen Struktur $I(x) = ix$.
- $((V_0)_{\mathbb{C}})^R \simeq V_0$ bzgl. der reellen Struktur $\kappa(x, y) = (x, -y)$.

Sei $U \subset V$ ein Unterraum, κ eine reelle Struktur des $\mathbb{C}$-Vektorraums V. Wir bezeichnen mit

$$Re(U) = \{x \in U \mid \kappa(x) = x\}$$

den *Realteil* von U bzgl. der reelen Struktur κ. Dieser kann als $\mathbb{R}$-Unterraum in V^R aufgefasst werden und es gilt:

$$U = Re(U)_{\mathbb{C}} = Re(U) \oplus i \cdot Re(U) \quad \Leftrightarrow \quad U = \kappa(U) \tag{1}$$

Sei weiter $f \in End(V_0)$, so existiert eine eindeutig bestimmte $\mathbb{C}$-lineare Ausdehnung $f_{\mathbb{C}} \in End\left((V_0)_{\mathbb{C}}\right)$, d.h. $f_{\mathbb{C}}|_{V_0} = f$ (wobei $V_0 \subset (V_0)_{\mathbb{C}}$ die kanonische Einbettung ist). Sei nun $U \subset (V_0)_{\mathbb{C}}$ ein κ- und $f_{\mathbb{C}}$-invarianten Unterraum, so ergeben sich folgende Relationen für $Re(U) \subset ((V_0)_{\mathbb{C}})^R \simeq V_0$:

$$\begin{gathered} f\big(Re(U)\big) \subset Re(U) \\ \big(f|_{Re(U)}\big)_{\mathbb{C}} = f_{\mathbb{C}}|_{Re(U)_{\mathbb{C}}} = f_{\mathbb{C}}|_U \end{gathered} \tag{2}$$

1.3 Proposition. *Sei $f \in End(V_0)$ und $f_{\mathbb{C}} \in End\left((V_0)_{\mathbb{C}}\right)$ die Komplexifizierung.*

(i) $\chi_f(x) = \chi_{f_{\mathbb{C}}}(x)$ *und* $\mu_f(x) = \mu_{f_{\mathbb{C}}}(x)$ *in* $\mathbb{C}[x]$.

(ii) $H_{f_{\mathbb{C}}}(\overline{\lambda}, i) = \overline{H_{f_{\mathbb{C}}}(\lambda, i)}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

(iii) Insbesondere gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$*:* $H_{f_{\mathbb{C}}}(\lambda, i) = H_f(\lambda, i)_{\mathbb{C}}$

Beweis. (i): $\mu_f(f_{\mathbb{C}})(x + iy) = \mu_f(f)(x) + i\mu_f(f)(y) = 0$, d.h. $\mu_f \in \mathbb{C}[x]$ annuliert $f_{\mathbb{C}}$ und damit $\mu_{f_{\mathbb{C}}} \big| \mu_f$. Umgekehrt gilt: $0 = \mu_{f_{\mathbb{C}}}(f_{\mathbb{C}}) = Re(\mu_{f_{\mathbb{C}}})(f_{\mathbb{C}}) + i \cdot Im(\mu_{f_{\mathbb{C}}})(f_{\mathbb{C}})$. Da $\mu_{f_{\mathbb{C}}}$ normiert ist, folgt $deg\,(Im(\mu_{f_{\mathbb{C}}})) < deg\,(\mu_{f_{\mathbb{C}}}) \leq deg\,(\mu_f)$. Da aber $Im(\mu_{f_{\mathbb{C}}})$ auch f annuliert und von echt kleineren Grad als μ_f ist, muss es verschwinden, d.h. $\mu_{f_{\mathbb{C}}} \in \mathbb{R}[x]$ und $\mu_{f_{\mathbb{C}}}(f) = 0$ und damit $\mu_f \big| \mu_{f_{\mathbb{C}}}$.

(ii) und (iii) beruhen im Wesentlichen auf den Eigenschaften (1) und (2). □

1.4 (Zerlegung in charakteristische Räume für nicht zerfallendes f).
Sei $f \in End(V_0)$ nicht zerfallend - V_0 also ein reeller Vektorraum - und

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{k} P_i^{m_i}(x), \quad \mu_f(x) = \prod_{i=1}^{k} P_i^{n_i}(x)$$

$P_i \in \mathbb{R}[x]$ irreduzibel (d.h. $deg(P_i) \in \{1, 2\}$) und $ggT(P_i, P_j) = 1$ $(i \neq j)$. Dann gilt für die Komplexifizierung zunächst $(V_0)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i^{n_i}(f_{\mathbb{C}})$ (Hauptraumzerlegung).

- *Ist $P_i(x) = (x - \lambda_i)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$* $\overset{1.3(iii)}{\Longrightarrow}$ $\ker P_i^{n_i}(f_{\mathbb{C}}) = (\ker P_i^{n_i}(f))_{\mathbb{C}}$.
- *Ist $P_i(x) = (x - \lambda_i)(x - \overline{\lambda_i})$* $\Longrightarrow$ $\ker P_i^{n_i}(f_{\mathbb{C}}) = H_{f_{\mathbb{C}}}(\lambda_i) \oplus H_{f_{\mathbb{C}}}(\overline{\lambda_i}) \overset{1.3(ii)}{=} H_{f_{\mathbb{C}}}(\lambda_i) \oplus \overline{H_{f_{\mathbb{C}}}(\lambda_i)}$, *d.h. auch $\ker P_i^{n_i}(f_{\mathbb{C}})$ ist ein κ-invarianter Unterraum und damit erhalten wir insgesamt*

$$\boxed{V_0 = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i^{n_i}(f) = \bigoplus_{Im(\lambda) \geq 0} C_f(\lambda)}$$

wobei wir die Räume

$$C_f(\lambda) := \begin{cases} \ker P_i^{n_i}(f) & \text{falls } P_i(\lambda) = 0 \\ \{0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

als **charakteristische Räume von f** *bezeichnen werden. Ist f zerfallend, also insbesondere wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, stimmen sie gerade mit den Haupträumen überein. Andernfalls gilt $C(\lambda_i) = C(\overline{\lambda_i}) = Re\left(H(\lambda_i) \oplus H(\overline{\lambda_i})\right)$.*

1.3 Charakteristische Unterräume für selbst- oder schiefadjungierte Operatoren

Sei (V, a, b) bzw. (V, a, B) ein Tripel wie in der Einführung erklärt. Dann hat die durch 1.4 garantierte Zerlegung in charakteristische Unterräume bzgl. B weitere Eigenschaften. Zunächst behandeln wir den Fall, dass a, b vom gleichen Typ sind.

1.5 Lemma. *Seien $a, b \in {S_2}^*(V)$ oder $a, b \in {\Lambda_2}^*(V)$, a nicht ausgeartet und sei B der zu b gehörige a-selbstadjungierte Operator. Dann sind die charakteristischen Räume $C(\lambda_i) = \ker P_i^{n_i}(B)$ paarweise a- und b-orthogonal.*

Beweis. Sei $x \in ker P_i^{n_i}(B)$, $y \in \ker P_j^{n_j}(B)$, $(i \neq j)$. Da $ggT(P_i, P_j) = 1$ existieren $U, V \in \mathbb{K}[x]$ mit $U \cdot P_i^{n_i} + V \cdot P_j^{n_j} = 1$ ($\mathbb{K}[x]$ euklidischer Ring). Damit erhalten wir:

$$a(x, y) = a\big(UP_i^{n_i}(B)(x), y\big) + a\big(x, VP_j^{n_j}(B)(y)\big) = 0$$
$$b(x, y) = a\big(UP_i^{n_i}(B)(x), B(y)\big) + a\big(x, B \cdot VP_j^{j}(B)(y)\big) = 0$$

□

Das analoge Lemma für einen schief-adjungierten Operator formulieren wir zunächst für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ausserdem können wir uns auf den Fall $^* = id$ beschränken, da eine schief-Hermitische Form wie oben erwähnt durch Multiplikation mit i in eine Hermitische übergeht und man damit in der Situation von Lemma 1.5 ist.

1.6 Lemma. *Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $(a, b) \in S_2(V) \times \Lambda_2(V) \cup \Lambda_2(V) \times S_2(V)$ und a nicht ausgeartet. Sei B der zu b gehörige a-schiefadjungierte Operator. Bezeichne mit λ_0 den evt. auftretenden Eigenwert 0. Dann gilt:*

(i) Die Haupträume $H_B(\lambda_i)$, $i \neq 0$ sind total isotrop bzgl. a und b.

(ii) $\mu_B(x) = \prod_{i=0}^{k} Q_i^{n_i}(x) \in \mathbb{C}[x]$, $Q_i(x) = (x - \lambda_i)(x + \lambda_i)$, $(i \geq 1)$ und $Q_0(x) = x$.

(iii) $V = \bigoplus_{\lambda \neq 0} \Big(H_B(\lambda) \oplus H_B(-\lambda)\Big) \oplus H_B(0)$ ist eine a- und b-orthogonal direkte Summe.

Beweis. B ist a-schiefadjungiert. Sei $B = S + N$ die Jordan-Chevalley-Zerlegung. Dann sind S, N gleichfalls a-schiefadjungiert[†]:

$B^* = S^* + N^*$ und $-B = -S - N$. Wir zeigen, dass beides Jordan-Chevalley-Zerlegungen von $B^* = -B$ sind. Mit der Eindeutigkeitsaussage von 1.2(iv) gilt dann $S^* = -S$ und $N^* = -N$:

[†]Im Falle B a-selbstadjungiertm ist die analoge Aussage nach 1.2(iii),(iv) sofort offensichtlich.

N^* ist nilpotent: Dies ist klar, denn $0 = a(x, N^n y) = a\big((N^*)^n x, y\big),\ \forall\, x, y$.

S^* ist halbeinfach: Sei $W \subset V$ ein S^*-invarianter Unterraum:

$$\begin{aligned} S^*(W) \subset W \quad &\Rightarrow \quad S\left(W^{\perp_a}\right) \subset W^{\perp_a} \\ &\overset{S\ halb\ einfach}{\Rightarrow} \quad \exists\, U \subset V \text{ mit } V = U \oplus W^{\perp_a} \text{ und } S(U) \subset U \\ &\Rightarrow \quad U^{\perp_a} \oplus W = V \text{ und } S^*\left(U^{\perp_a}\right) \subset U^{\perp_a} \end{aligned}$$

$[N^*, S^*] = 0$: Dies ergibt sich sofort aus $[N, S] = 0$.

Die analogen Aussagen für $-S, -N$ sind offensichtlich. Nun zum Beweis des Lemmas:

(i): Sei $x, y \in \ker(B - \lambda_i)^{n_i} = \ker(S - \lambda_i),\ (i \geq 1)$. Dann gilt wegen $^* = id$:

$$\begin{aligned} a(x,y) &= \lambda_i^{-1} \cdot a(x, S(y)) = \lambda_i^{-1} \cdot a(-S(x), y) = -a(x,y) \\ &\Rightarrow \quad a(x,y) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \lambda_i^{-1} \cdot a(x, BS(y)) \overset{[B,S]=0}{=} \lambda_i^{-1} \cdot a(-S(x), B(y)) = -b(x,y) \\ &\Rightarrow \quad b(x,y) = 0 \end{aligned}$$

(ii): Bezüglich einer beliebigen Basis gilt $Mat(B)^t = -Mat(a) \cdot Mat(B) \cdot Mat(a)^{-1}$. Daraus ergibt sich sofort $\mu_B(x) = \mu_{-B}(x)$. Insbesondere gilt $spec(B) = -spec(B)^\dagger$.

(iii): Wähle $U, V \in \mathbb{C}[x]$ mit $U \cdot P_i^{n_i} + V \cdot P_j^{n_j} = 1,\ (i \neq j)$ - oBdA $j > 0$. Da dann $x^2 \big| P_j(x)$, ist $P_j(B)$ a-selbstadjungiert. Die selbe Rechnung wie in 1.5 liefert nun die Behauptung. $\square$

Der reelle Fall kann wie folgt auf das obige Lemma zurckgeführt werden, wobei allerdings einige Fallunterscheidungen in Kauf zu nehmen sind:

Betrachte die Komplexifizierung $(V_\mathbb{C}, B_\mathbb{C})$. Weiterhin sei $a_\mathbb{C}$ die *bilineare* Ausdehnung von a auf $V_\mathbb{C}$ und $b_\mathbb{C}(\cdot,\cdot) = a_\mathbb{C}(\cdot, B_\mathbb{C}(\cdot))$. Nach dem allgemeinen Resultat 1.4 zerlegt sich V in charakteristische Unterräume $C_B(\lambda)$. Diese sind nach Lemma 1.6 total isotrop genau dann wenn $H_{B_\mathbb{C}}(\lambda) + H_{B_\mathbb{C}}(\overline{\lambda})$ total isotrop ist bzgl. $a_\mathbb{C}$, d.h. $\lambda \notin i\mathbb{R}$. In diesem Fall muss noch das "Dual" $C_B(-\lambda)$ hinzugenommen werde.

---

†Eine weitere Möglichkeit, (ii) ohne die Verwendung von Koordinaten zu verifizieren, ist die folgende: Sei $S(x) = \lambda x$ und sei W ein S-invariantes Komplement von $\mathbb{C}x$, sowie $span\{y\} = W^{\perp_a}$. Dann gilt $S^*(W^{\perp_a}) \subset W^{\perp_a}$, d.h. $S^*(y) = \mu y$. Weiter ist $a(x,y) \neq 0$ und $\lambda a(x,y) = a(S(x), y) = a(x, S^*(y)) = \mu a(x,y)$. Mit anderen Worten $spec(-B) = spec(B^*) = spec(B)$. Wegen $a(x,y) \neq 0$ sind $Eig_S(\lambda)$ und $Eig_{S^*}(\lambda)$ dual gepaart bzgl. a. Daraus folgt, dass $N|_{Eig_S(\lambda)}$ und $N^*|_{Eig_{S^*}(\lambda)} = N|_{Eig_S(-\lambda)}$ vom gleichen Nilindex sind und deshalb stimmen die Potenzen im Minimalpolynom von $(x - \lambda)$ und $(x + \lambda)$ überein.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ existiert also ebenfalls eine $a-$ und $b-$orthogonale Zerlegung von V, die sich aus folgenden 4 Typen zusammensetzt:

$$V = \bigoplus_{Re(\lambda), Im(\lambda) \geq 0}^{\perp} V_B(\lambda)$$

$$V_B(\lambda) := \begin{cases} H_B(0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{für } \lambda = 0 \\ H_B(\lambda) \oplus H_B(-\lambda) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{für } \lambda \in \mathbb{R}^+ \\ Re\left(H_B(\lambda) \oplus H_B(\overline{\lambda})\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{für } \lambda \in i\mathbb{R}^+ \\ Re\left(H_B(\lambda) \oplus H_B(\overline{\lambda}) \oplus H_B(-\lambda) \oplus H_B(-\overline{\lambda})\right) & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

Die beiden Lemmata dieses Abschnitts garantieren also eine Zerlegung des zugrundeliegenden Vektorraumes in kanonische Unterräume, bezüglichen deren a und B Blockdiagonalgestalt annehmen. Für die Aufgabe, eine an a angepassten Normalform für B zu finden können wir uns folglich auf einen dieser Räume beschränken, die hier nocheinmal - als Summen charakteristischer Räume - aufgeführt seien:

a-orthogonale und B-invariante Unterräume $V_B(\lambda)$:

	$V_B(\lambda)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$	$V_B(\lambda)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$B = B^*$	$C_B(\lambda)$	$C_B(\lambda)$
$B = -B^*$	$C_B(\lambda) \oplus C_B(-\lambda),\ \lambda \neq 0$ $C_B(0),\ \lambda = 0$	$C_B(\lambda) \oplus C_B(-\lambda),\ Re(\lambda) \neq 0$ $C_B(\lambda),\ \lambda \in i\mathbb{R}$

1.4 Eine Normalform von (a, B) für nilpotentes B

Sei B selbst- bzw. schiefadjungiert und $B = S + N$ die Jordan-Chevalley-Zerlegung. Dann hatten wir gesehen, dass S und N vom selben Typ sind wie B. In diesem Abschnitt befassen wir uns zunächst mit dem nilpotenten Teil N. Sei n der Nilindex von N, d.h. $N^n = 0,\ N^{n-1} \neq 0$.

Kanonisch gegebene Unterräume sind dann $\boldsymbol{V_{p,q} := \operatorname{rg} N^{n-p} \cap \ker N^q}$. Diese können als Flaggen in folgendem Diagramm arrangiert werden:

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
V_{1,1} & & & & & & & & & & & \operatorname{rg} N^{n-1} \\
\cap & & & & & & & & & & & \cap \\
V_{2,1} & \subset & V_{2,2} & & & & & & & & & \operatorname{rg} N^{n-2} \\
\cap & & \cap & & & & & & & & & \cap \\
V_{3,1} & \subset & V_{3,2} & \subset & V_{3,3} & & & & & & & \operatorname{rg} N^{n-3} \\
\cap & & \cap & & \cap & & & & & & & \cap \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\
\cap & & \cap & & \cap & & & & & & & \cap \\
V_{n-1,1} & \subset & V_{n-1,2} & \subset & V_{n-1,3} & \subset & \dots & \subset & V_{n-1,n-1} & & & \operatorname{rg} N \\
\cap & & \cap & & \cap & & & & \cap & & & \cap \\
V_{n,1} & \subset & V_{n,2} & \subset & V_{n,3} & \subset & \dots & \subset & V_{n,n-1} & \subset & V_{n,n} & \operatorname{rg} N^0 = V \\
\hline
\ker N & \subset & \ker N^2 & \subset & \ker N^3 & \subset & \dots & \subset & \ker N^{n-1} & \subset & \ker N^n = V & \cap
\end{array}
\tag{4}
$$

Direkt aus der Definition folgt

$$N(V_{p,q}) = V_{p-1,q-1} \tag{5}$$

Insbesondere stabilisieren sich die waagerechten Flaggen in (4) jeweils rechts von der Hauptdiagonalen. Die Anordnung obiger Flaggen legt es nahe nach einer Familie von Vektorraum-Komplementen $D_{p,q}$ zu suchen, die folgende Eigenschaften hat:

$$V_{p,q} = D_{p,q} \oplus (V_{p-1,q} + V_{p,q-1}) \quad \text{d.h. } V = \bigoplus_{p,q} D_{p,q} \tag{6}$$

Es gibt zwei Gesichtspunkte nach denen diese Komplemente konstruiert werden können:

1. Wähle zunächst beliebige Komplemente $D_{n,i},\ 1 \leq i \leq n$ (unterste Zeile) und setzte $D_{p,q} := N^{n-p}(D_{n,q+n-p})$. Wegen (5) erfüllt die Familie $\{D_{p,q}\}$ die Eigenschaft (6) und weiterhin gilt per Definition:

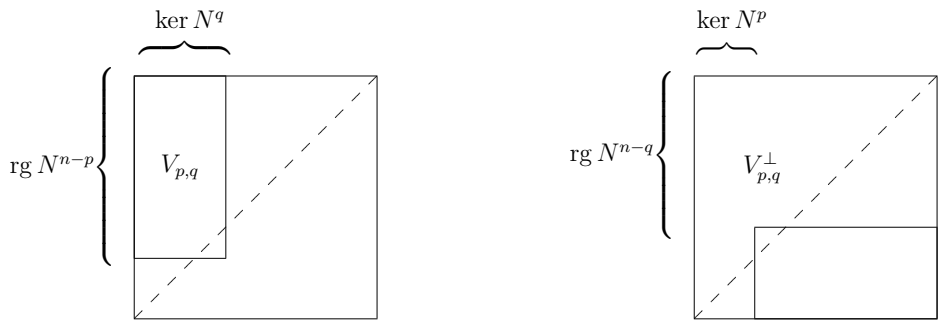
   $$N(D_{p,q}) = D_{p-1,q-1} \tag{7}$$

   Diese Zerlegung von V wird auch für die Jordansche Normalform eines allgemeinen nilpotenten Operators genutzt.

2. Eine zweite Möglichkeit zur Konstruktion von Komplementen verwendet die gegebene nichtausgeartete Form a. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} &(\ker N^q)^{\perp_a} = \operatorname{rg} N^q \\ \Rightarrow \quad &{V_{p,q}}^{\perp_a} = (\operatorname{rg} N^{n-p})^{\perp_a} + (\ker N^q)^{\perp_a} = V_{n,n-p} + V_{n-q,n} \end{aligned} \tag{8}$$

Die Operation "orthogonales Komplement bilden" kann man sich veranschaulichen als Spiegelung an der um 90° gedrehten Hauptdiagonalen und anschliessendes Komplementieren:



Nun wähle man beliebige Komplemente $D_{p,q}$, $(2 \leq p+q \leq n)$. Wegen (8) ist $\bigoplus_{2\leq p+q\leq n} D_{p,q}$ total isotrop bzgl. a. Man überlegt sich nun leicht (durch schrittweise Konstruktion), dass man die noch fehlenden Komplemente gerade so wählen kann dass folgende direkte a-orthogonale Summe entsteht:

$$\left(\bigoplus_{2\leq p+q\leq n}^{\perp_a} \underbrace{(D_{p,q} \oplus D_{n-p+1,n-q+1})}_{\text{singulär gepaart}} \right) \overset{\perp_a}{\oplus} \left(\bigoplus_{p+q=n+1}^{\perp_a} D_{p,q} \right) \tag{9}$$

Das Ziel des folgenden Abschnitts ist es, durch vollständige Induktion über den Nilindex von N eine Familie $\{D_{p,q}\}$ von Komplementen (6) zu konstruieren, die *sowohl* (7) *als auch* (9) erfüllt. Eine solche Zerlegung von V heisse **(V, N, a)-angepasst**.

Betrachte dazu die Folge $\{\ker N^k\}$ von N-invarianten Unterräumen mit den zugehörigen Quotienten $\boldsymbol{V^k := V/\ker N^k}$ und den jeweils durch N induzierten nilpotenten Abbildungen, die wieder mit N bezeichnet seien.

Das analog zu (4) von (V^k, N) induzierte Diagramm geht aus (V^{k-1}, N) durch die kanonische Projektion $\boldsymbol{\pi^k : V^{k-1} \longrightarrow V^k}$ hervor:

$$\begin{pmatrix} V_{k,k}^{k-1} & & & \\ V_{k+1,k}^{k-1} & V_{k+1,k+1}^{k-1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ V_{n,k}^{k-1} & V_{n,k+1}^{k-1} & \cdots & V_{n,n}^{k-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi^k} \begin{pmatrix} V_{k+1,k+1}^{k} & & \\ \vdots & \ddots & \\ V_{n,k+1}^{k} & \cdots & V_{n,n}^{k} \end{pmatrix}$$

Weiter ist $\boldsymbol{b^k(\cdot,\cdot) := a(\cdot, N^k(\cdot))}$ eine nicht ausgeartete Form auf V^k (ihr Typ ist konstant oder alternierend in k jenachdem, ob B selbstadjungiert oder schiefadjungiert

ist) und (8) übersetzt sich in:

$$\left(V^k_{k+p,k+q}\right)^{\perp_{b^k}} = V_{n,n-p} + V_{n-q,n} \tag{10}$$

Damit ist der Weg für ein Induktionsargument geebnet:

1.7 (Angepasste Zerlegung).

(i) Sei $\mathcal{D}^{k-1} = \{D^{k-1}_{p,q}\}$ eine (V^{k-1}, N, b^{k-1})-angepasste Zerlegung. Dann ist die Projektion $\pi^k(\mathcal{D}^{k-1}) = \{\pi^k\left(D^{k-1}_{p,q}\right)\}$ eine (V^k, N, b^k)-angepasste Zerlegung.

(ii) Sei umgekehrt eine (V^k, N, b^k)-angepasste Zerlegung $\mathcal{D}^k$ gegeben, dann lässt sich daraus eine (V^{k-1}, N, b^{k-1})-angepasste Zerlegung $\mathcal{D}^{k-1}$ mit $\pi^k(\mathcal{D}^{k-1}) = \mathcal{D}^k$ konstruieren.

Insbesondere existiert also eine $(V^0, N, b^0) = (V, N, a)$-angepasste Zerlegung.

Beweis. Zu (i): Die Eigenschaften (6) und (7) sind offensichtlich für $\pi^k(\mathcal{D}^{k-1})$. Die metrische Eigenschaft (9) ergibt sich unmittelbar aus $b^k(\pi^k(x), \pi^k(y)) = b^{k-1}(x, N(y))$.

Zu (ii): Sei $E^{k-1} := (\pi^k)^{-1}\left(\bigoplus_{k+1\le q\le n} D^k_{n,q}\right) \subset V^{k-1}$.

E^{k-1} ist nicht ausgeartet bzgl. b^{k-1} : Sei $H \subset V^{k-1}$ ein Unterraum mit:

$$V^{k-1} = H \oplus V^{k-1}_{n-1,n} \quad \text{und} \quad \pi^k(H) = \pi^k(E^{k-1})$$

Dann ist $E^{k-1} = H \oplus V^{k-1}_{n-1,k} = H + V^{k-1}_{n,k}$ und $(E^{k-1})^\perp \overset{(10)}{=} H^\perp \cap V^{k-1}_{n-1,n}$, also:

$$\begin{aligned}
(E^{k-1})^\perp \cap E^{k-1} &= H^\perp \cap V^{k-1}_{n-1,n} \cap \left(H + V^{k-1}_{n-1,k}\right) \\
&= H^\perp \cap V^{k-1}_{n-1,k} \qquad \left(\text{da } V^{k-1}_{n-1,k} \subset V^{k-1}_{n-1,n} \text{ und } V^{k-1}_{n-1,n} \cap H = \emptyset\right) \\
&\overset{(10)}{=} \left(H + V^{k-1}_{n-1,n}\right)^\perp \\
&= (V^{k-1})^\perp = \{0\}
\end{aligned}$$

Konstruktion der Komplemente $D^{k-1}_{p,q}$: Betrachte das Tripel $(E^{k-1}, b^{k-1}, V^{k-1}_{n,k})$ bestehend aus einem Vektorraum, einer nicht ausgearteten Form und einem Unterraum. Da $(V^{k-1}_{n,k})^\perp \cap E^{k-1} \overset{(10)}{=} V^{k-1}_{n-1,k}$ total isotrop ist, existiert eine Zerlegung

$$\underbrace{\left(W^{k-1} \oplus \overbrace{V^{k-1}_{n-1,k}}^{V^{k-1}_{n,k}}\right)}_{\text{singulär gepaart}} \overset{\perp}{\oplus} D^{k-1}_{n,k} = E^{k-1}$$

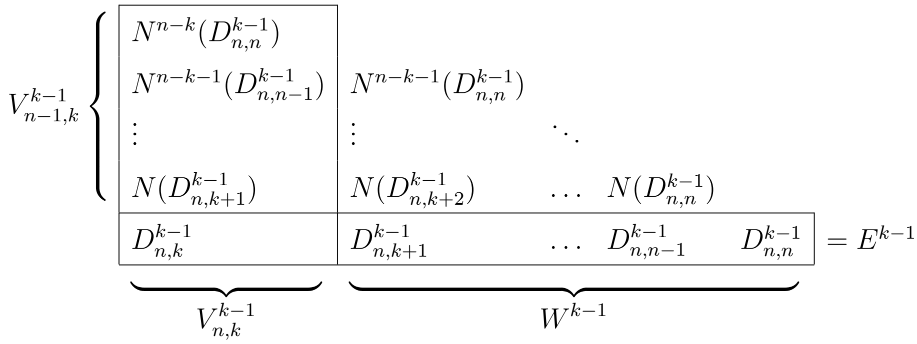
wobei W^{k-1} ein total isotroper - i.a. *nicht eindeutig* bestimmter - Unterraum dual zu $V^{k-1}_{n-1,k}$ ist und $D^{k-1}_{n,k} := \left(W^{k-1} \oplus V^{k-1}_{n-1,k}\right)^\perp$. Diese Zerlegung induziert einen Isomorphismus

$$\pi^k|_{W^{k-1}} : W^{k-1} \to \bigoplus_{k+1\le q\le n} D^k_{n,q}$$

Nun können die Komplemente $D^{k-1}_{p,q}$ definiert werden durch:

$$\begin{aligned} D^{k-1}_{n,q} &:= \left(\pi^k|_{W^{k-1}}\right)^{-1} D^k_{n,q} \quad (k+1 \leq q \leq n) \\ D^{k-1}_{p,q} &:= N^{n-p}\left(D^{k-1}_{n,q+n-p}\right) \end{aligned}$$

Wir fassen die Situation nochmal im folgenden Bild zusammen:



$\{D^{k-1}_{p,q}\}$ ist eine (V^{k-1}, N, b^{k-1})-angepasste Zerlegung :

- Per Definitionem ist (7) erfüllt.
- $\pi^k \circ N = N \circ \pi^k$ impliziert $\pi^k\left(D^{k-1}_{p,q}\right) = D^k_{p,q}$.
- Die Eigenschaft (6) ist erfüllt, d.h. $V^{k-1}_{p,q} = \left(V^{k-1}_{p-1,q} + V^{k-1}_{p,q-1}\right) \oplus D^{k-1}_{p,q}$:
  - Für $D^{k-1}_{n,k}$ ist dies per Definitionem gegeben.
  - Für $q \geq k+1$ gilt nach Voraussetzung an die $\{D^k_{p,q}\}$:

    $$\begin{aligned} \left(V^{k-1}_{n-1,q} + V^{k-1}_{n,q-1}\right) + D^{k-1}_{n,q} &= \left(\pi^k\right)^{-1}\left(V^k_{n-1,q} + V^k_{n,q-1}\right) + \left(\pi^k|_{W^{k-1}}\right)^{-1} D^k_{n,q} \\ &= \left(\pi^k\right)^{-1}\left(V^k_{n,q}\right) = V^{k-1}_{n,q} \end{aligned}$$

    und da $\pi^k|_{W^{k-1}}$ ein Isomorphismus ist, überträgt sich die Eigenschaft $\left(V^k_{n-1,q} + V^k_{n,q-1}\right) \cap D^k_{n,q} = \{0\}$ auf das Niveau $k-1$.
  - Für $p < n$ benutze man schliesslich die Translations-Eigenschaft der Räume $V^{k-1}_{p,q}, D^{k-1}_{p,q}$ unter N.
- Die metrische Eigenschaft (9) ist erfüllt: Nach Konstruktion ist $D^{k-1}_{n,k}$ nicht ausgeartet, $D^{k-1}_{n,q}$ $(k+1 \leq q \leq n)$ total isotrop und $D^{k-1}_{n,k} \perp D^{k-1}_{n,q}$ $(k+1 \leq q \leq n)$ - alle Eigenschaften bzgl. b^{k-1}.
  Sei nun $y_i \in D^{k-1}_{n-p_i,q_i-p_i} = N^{p_i}\left(D^{k-1}_{m,q_i}\right)$, d.h. $y_i = N^{p_i}(x_i)$ für ein $x_i \in D^{k-1}_{m,q_i}$, $(i = 1,2)$. Nach obiger Bemerkung ist nur noch der Fall $p_1 + p_2 \geq 1$ zu untersuchen:

  $$\begin{aligned} b^{k-1}(y_1, y_2) = b^{k-1}\left(N^{p_1}(x_1), N^{p_2}(x_2)\right) = \\ \pm\, b^{k-1}\left(x_1, N^{p_1+p_2}(x_2)\right) = \pm b^k\left(\pi^k(x_1), N^{p_1+p_2-1}\pi^k(x_2)\right) \end{aligned}$$

  Damit übertragen sich die metrischen Relationen wie gefordert für $k-1$. □

1.8 Bemerkung. Die Freiheitsgrade in der Zerlegung $V = \bigoplus D_{p,q}$ liegen in der sukzessiven Wahl der Räume W^{k-1} und $D^{k-1}_{k,k}$, $(1 \leq k \leq n)$. Die Familie aller (V, N, a)-angepassten Zerlegungen kann aufgefasst werden als ein Faktor in der Invarianzgruppe $\Omega = stab(a) \cap stab(b)$ (siehe auch Bemerkung 1.10). Für Details verweisen wir auf [Bou00, Theorem 1-6].

Für ein Paar (a, b) von Formen auf V, wobei a nicht ausgeartet und b nilpotent ist, haben wir bisher eine Zerlegung $V = \bigoplus D_{p,q}$ erzielt, die bereits wesentliche Invarianten enthält, nämlich die Dimensionen $\boldsymbol{d_k := \dim(D_{n,k}) = \cdots = \dim(D_{n-k+1,1})}$. Wir wollen diese Invarianten unter Berücksichtigung von $\mathbb{K}$ und des Typs von a und b (beides spielte bisher keine Rolle) gegebenenfalls verfeinern. Dies führt auf angepasste Basen in jedem der Räume $D_{p,q}$ und es wird sich zeigen, dass damit alle Invarianten in der vorliegenden Situation bestimmt sind. Im nächsten Kapitel wird es dann darum gehen den halbeinfachen Anteil von b in die hier angestellten Betrachtungen zu integrieren.

Aus 1.7 geht hervor, dass $\left(D^{k-1}_{n,k}, b^{k-1}|_{D^{k-1}_{n,k}}\right)$, $(1 \leq k \leq n)$ jeweils Räume mit einer nichtausgearteten Form sind. Um zu sehen, dass die Einschränkung der Form b^{k-1} auf $D^{k-1}_{n,k}$ nicht von der speziellen Wahl des Raumes $D^{k-1}_{n,k}$ abhängt, betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr] & & & \\
& V/\ker\left(b^{k-1}\right) = V^{k-1} \arrow[dr] & & \\
D_{n,k} \arrow[uu, hook] \arrow[r] & D^{k-1}_{n,k} \arrow[uu, hook] \arrow[r] & V^{k-1}_{n,k} \Big/ \ker\left(b^{k-1}|_{V^{k-1}_{n,k}}\right) := \check{V}^{k-1} &
\end{tikzcd}$$

Die kanonischen Projektionen in der Diagonalen induzieren Isomorphismen in der zweiten Zeile und alle Abbildungen erhalten die Form b^k. Insbesondere sind

$$\left(D_{n,k}, b^{k-1}|_{D_{n,k}}\right) \quad \simeq \quad \left(\check{V}^{k-1}, \check{b}^{k-1}\right) \tag{11}$$

isometrisch, wobei $\check{b}^{k-1}$ durch b^{k-1} induziert wird. Wir fixieren nun Basen $\beta_{n,k}$ in $D_{n,k}$, die eine Normalform von $b^{k-1}|_{D_{n,k}}$ realisieren, d.h. *pseudo-orthonormale*, *pseudo-unitäre* oder *symplektische Basen* entsprechend dem Typ von $\check{b}^{k-1}$ und $\mathbb{K}$. Bezüglich einer solchen Basis bezeichne man $\boldsymbol{M_k := Mat_{\beta_{n,k}}\left(b^{k-1}|_{D_{n,k}}\right)}$:

$\mathbb{K}$ und Typ von $\check{b}^k$	Invarianten von $\check{b}^k$	M_k
$S_2(\check{V}^k, \mathbb{R})$ $\overline{S}_2(\check{V}^k, \mathbb{C}) = i \cdot \overline{\Lambda}_2(\check{V}^k, \mathbb{C})$	$\mathrm{sig}(\check{b}^k) = (p_k, q_k),\ p_k + q_k = d_k$	I_{p_k,q_k}
$S_2(\check{V}^k, \mathbb{C})$	$\dim_{\mathbb{C}}(\check{V}^k) = d_k \in \mathbb{N}_0$	I_{d_k}
$\Lambda_2(\check{V}^k, \mathbb{K})$	$\dim_{\mathbb{K}}(\check{V}^k) = d_k \in 2\mathbb{N}_0$	$J_{d_k/2}$

(12)

mit der üblichen Kurzschreibweise $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ und $J_d = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{K})$.

Nun generiert man daraus eine Basis $\beta = \left\{\beta_{p,q}\right\}_{p-q\geq 0}$ von ganz V mittels folgender Basen in den Unterräumen $D_{p,q}$:

$$\beta_{p,q} = N^{n-p}(\beta_{n,q+n-p}) \tag{13}$$

Eine solche Basis spezieller Hauptkettenvektoren nennen wir *angepasst*. Unter Verwendung von (9) erhält man:

1.9 (Normalform für (a, N)). *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, a eine nicht ausgeartete Form auf V und $N \in End(V)$ nilpotent vom Nilindex n sowie selbst- bzw. schiefadjungiert bzgl. a d.h. $N^* = \epsilon \cdot N$, $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Weiterhin sei $\mathcal{D} = \{D_{p,q}\}$ eine (V, N, a) – angepasste Zerlegung sowie $\beta = \{\beta_{p,q}\}$ eine angepasste Basis von $\mathcal{D}$.*

Dann ist $V = \bigoplus_{k=1}^{n} F_k$ mit $F_k := \bigoplus_{l=1}^{n} D_{n-k+l,l}$ eine N-invariante und a-orthogonale Zerlegung von V (siehe (14)) und bezüglich der Basen $\beta_k = \{\beta_{n-k+1,1}, \ldots, \beta_{n,k}\}$ von F_k erhalten die Matrizen $\boldsymbol{A_k(\epsilon, M_k) := Mat_{\beta_k}(a|_{F_k})}$ und $\boldsymbol{N_k := Mat_{\beta_k}(N|_{F_k})}$ folgende Gestalt:

$$A_k(\epsilon, M_k) = \begin{pmatrix} \overbrace{}^{D_{n-k+1,1}} & \overbrace{}^{D_{n-k+2,2}} & & \overbrace{\phantom{\epsilon^{k-1} \cdot M_k}}^{D_{n,k}} \\ & & & \epsilon^{k-1} \cdot M_k \\ & \epsilon \cdot M_k & \iddots & \\ M_k & & & \end{pmatrix}, \qquad N_k = \begin{pmatrix} 0 & I_{d_k} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & I_{d_k} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $Mat_\beta(a) = diag\big(A_1(\epsilon, M_1), \ldots, A_k(\epsilon, M_k)\big)$, $Mat_\beta(N) = diag(N_1, \ldots, N_k)$. Dabei ist wie oben erklärt $M_k \in \left\{I_{p_k,q_k}, I_{d_k}, J_{d_k/2}\right\}$ entsprechend des Typs von a und ϵ. Die angegebenen Matrizen kodieren nur Invarianten des Paares (a, N) und realisieren damit eine Normalform.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\boldsymbol{D_{1,1}} & & & & & & & & \\
 & \oplus & & & & & & & \\
\boldsymbol{D_{2,1}} & & \boldsymbol{D_{2,2}} & & & & & & \\
 & \oplus & & \oplus & & & & & \\
\ddots & & \ddots & & \ddots & & & & \\
 & & & \oplus & & \oplus & & & \\
\boldsymbol{D_{n-1,1}} & & \ddots & & \boldsymbol{D_{n-1,n-2}} & & \boldsymbol{D_{n-1,n-1}} & & \\
 & \oplus & & & & \oplus & & \oplus & \\
\boldsymbol{D_{n,1}} & & \boldsymbol{D_{n,2}} & & \ddots & & \boldsymbol{D_{n,n-1}} & & \boldsymbol{D_{n,n}} \\
 & \geqslant & & \geqslant & & & & \geqslant & \\
 & & \boldsymbol{F_1} & & \boldsymbol{F_2} & & \ldots & & \boldsymbol{F_{n-1}} \qquad \boldsymbol{F_n}
\end{array} \tag{14}$$

Umgekehrt liefert die Vorgabe der Grössen

$n \in \mathbb{N}$ ..... Nilindex von N
$\epsilon \in \{\pm 1\}$ ..... Selbst-/Schiefadjungiertheit von N
$d_k \in \mathbb{N}_0$ bzw. $(p_k, q_k) \in {\mathbb{N}_0}^2$ ..... Dimension bzw. Signatur von M^k
$M^k \in \left\{I_{p_k,q_k}, I_{d_k}, J_{d_k/2}\right\}$ ..... Typ von $\check{b}^{k-1}$

ein Paar (a, N) mit den bisherigen Eigenschaften unter der Vorraussetzung, dass:

- $d_n \neq 0$ und d_k bzw. (p_k, q_k) ist mit M^k verträglich.
- Der Typ von M^k ist konstant (bzw. alternierend) $\Leftrightarrow \epsilon = +1$ (bzw. $\epsilon = -1$).
- Dabei bestimmt der Typ von M^1 denjenigen von $b^0 = a$.

1.10 Bemerkung. Die Menge der angepassten Basen für eine fixierte Zerlegung $\{D_{p,q}\}$ bilden den zweiten Anteil an Ω (neben den in 1.8 angesprochenen). Genauer gilt im vorliegenden Fall (siehe [Bou00, Thm.1]):

$\Omega \simeq \mathcal{N} \rtimes \mathcal{R}$ wobei:

- $\mathcal{N} = \{\gamma \in \Omega \,|\, \gamma$ wirkt trivial auf $\check{V}^k$, $\forall k\} \subset \Omega$ ist eine normale nilpotente Untergruppe. Sie wirkt einfach transitiv auf den (V, N, a)-angepassten Zerlegungen.
- $\mathcal{R} = \Omega/\mathcal{N}$ wirkt einfach transitiv auf $\prod_{k=1}^{n} stab(\check{b}^k)$ und ist reduktiv.

Der Raum $\ker N = V_{n,1} = \bigoplus_{k=1}^{n} D_{k,1}$ besteht gerade aus den Eigenvektoren von N. Insbesondere sehen wir nun - wie in der Einleitung erwähnt, dass ein isotroper Eigenvektor, der orthogonal zu allen anderen Eigenvektoren steht, (d.h. ein Element in $V_{n,1} \cap {V_{n,1}}^{\perp} = \bigoplus_{k=1}^{n-1} D_{k,1}$), einen nichtrivialen Jordanblock von N erfordert. Genauer: ist a symmetrisch ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitisch, so gilt:

$$\operatorname{sig}(a) = \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \left(\widetilde{p}_{2k-1}, \widetilde{q}_{2k-1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left([k/2] \cdot d_k, [k/2] \cdot d_k\right) \tag{15}$$

wobei $\left(\widetilde{p}_k, \widetilde{q}_k\right)$ die Signatur von $\epsilon \cdot M_k$ bezeichne. Der total isotrope Unterraum der Dimension $\sum_{k=1}^{n} [k/2] \cdot d_k$ ist $\bigoplus_{(0 \leq p-q) \wedge (p+q<n+1)} D_{p,q}$. Insbesondere beschränkt die Signatur von a die Anzahl und Länge der möglichen Jordanblöcke von N gemäss (15). Im Gegensatz dazu existiert, falls $a \in \Lambda_{\mathbb{K}}(V)$ eine symplektische Form ist, immer ein total isotroper Unterraum der Dimension $\dim(V)/2$.

2 Normalformen für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

In diesem Abschnitt wird der halbeinfache Teil S von $B = S + N$ mit der bereits erlangten Normalform für (a, N) in Verbindung gebracht. Die Vorgehensweise ist sowohl für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ als auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ im Wesentlichen die selbe und setzt sich aus folgenden 3 Schritten zusammen:

1. Zunächst zerlegen wir V gemäss Lemma 1.5 und 1.6 in die a-orthogonale und B-invariante direkte Summe der auf Seite 10 aufgeführten Räume $V_B(\lambda)$. Damit können wir uns im Folgenden auf den Fall $V = V_B(\lambda)$ beschränken.

2. Wir zeigen die Existenz einer S-invarianten (V, a, N)-angepassten Zerlegung $\{D_{p,q}\}$. Für $spec(S) = \{\lambda\}$ ist dies natürlich erfüllt. In den anderen Fällen werden wir - gegebenenfalls nach Komplexifizierung - zunächst eine angepasste Zerlegung auf einem Eigenraum $H_S(\lambda) \subset V(\lambda)$ konstruieren und diese dann geeignet auf die assoziierten Eigenräume $H_S(\overline{\lambda})$ bzw. $H_S(-\lambda)$ übertragen.

3. Da $[S, N] = 0$, ist $S|_{D_{n,k}}$ ein selbst- bzw. schiefadjungierter Operator bzgl. $b^{k-1}(\cdot, \cdot) = a(\cdot, N^{k-1}(\cdot))$. Analog zu den Zerlegungen bestimmen wir zunächst eine Basis in $H_{S|_{D_{n,k}}}(\lambda) = H_S(\lambda) \cap D_{n,k}$ und assozieren dann - gegebenenfalls durch Übergang zum Realteil - eine angepasste Basis in $D_{n,k}$.

   Sowohl in 2. als auch in 3. kommen 1.5 und 1.6 zur Anwendung.

4. Der Übergang zu einer Basis von ganz V geschieht mittels (13).

Neben den beiden in 1.9 definierten Blockmatrizen $A_k(\epsilon, M_k)$ und N_k führen wir dazu noch einen dritten Typ ein, nämlich

$$S_k(L_k) := diag(\underbrace{L_k, \ldots, L_k}_{k \text{ Blöcke}}), \quad L_k \in M_{d_k,d_k}(\mathbb{K})$$

Für den algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt es 3 Fälle zu unterscheiden.Die erste Fallunterscheidung betrifft den Typ von B.

2.1 B sei a-selbstadjungiert

Nach 1.2(ii) und 1.5 zerlegt sich V in die a-orthogonale und B-invariante direkte Summe $V = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} H_B(\lambda)$. Sei deshalb $V = H_B(\lambda)$. Dann ist die Jordan-Chevalley-Zerlegung von B gegeben durch $B = \lambda \cdot id_V + N$. Der Nilindex von N sei n.

Weiter sei $\beta = \{\beta_k\}$ eine Basis wie in 1.9 bzgl. einer (V, N, a)-angepassten Zerlegung, so gilt mit den in 1.9 eingeführten Matrizen:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu_B(x) = (x-\lambda)^n : \\ Mat_{\beta_k}(a|_{F_k}) = A_k\,(+1, M_k)\,, \quad Mat_{\beta_k}(B|_{F_k}) = S_k\,(\lambda \cdot I_{d_k}) + N_k \\ M_k \text{ vom selben Typ wie } a \text{ für } k = 1, \ldots, n \end{array}} \tag{16}$$

2.2 B sei a-schiefadjungiert

Wie bereits erwähnt können wir uns auf den Fall $^* = id$ beschränken und betrachten die in 1.6(iii) beschriebene Zerlegung von V. a ist nicht ausgearte auf $H_B(0)$ und $B|_{H_B(0)}$ ist nilpotent. Damit ist die Normalform von $(a|_{H_B(0)}, B_{H_B(0)})$ bereits durch 1.9 gegeben:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu_B(x) = x^n : \\ Mat_{\beta_k}(a|_{F_k}) = A_k\,(-1, M_k)\,, \quad Mat_{\beta_k}(B|_{F_k}) = N_k \\ M_k \text{ vom selben Typ wie } a \text{ für } 1 \le k \le n,\ k \equiv 1 \ mod\ 2 \\ M_k \text{ vom komplementären Typ zu } a \text{ für } 1 \le k \le n,\ k \equiv 0 \ mod\ 2 \end{array}} \tag{17}$$

Es bleibt der Fall $V = H_B\lambda \oplus H_B{-\lambda}$, $(\lambda \neq 0)$ zu untersuchen. Dazu dient das folgende

2.1 Lemma. *Sei B ein a-schiefadjungierter Operator mit spec$(B) = \{\lambda, -\lambda\}$, $(\lambda \neq 0)$ und sei $B = S + N$ seine Jordan-Chevalley-Zerlegung.*

Dann existiert eine Zerlegung $\{D_{p,q}\}$ von V, die (V, N, a)-angepasst und S-invariant ist. Insbesondere ist diese Zerlegung dann auch $\big(V, N, a(\cdot, S(\cdot))\big)$-angepasst.

Beweis. Bezeichne mit $V^\pm := \ker(S \mp \lambda) = H_B(\pm\lambda)$ die beiden (bzgl. a singulär gepaarten) Haupträume, d.h. $V = V^+ \oplus V^-$. Weiter sei $N^\pm := N|_{V^\pm}$ und wie bisher $V^\pm_{p,q} := \mathrm{rg}(N^\pm)^{n-p} \cap \ker(N^\pm)^q$. Dann existiert eine (V^+, N^+)-angepasste Zerlegung $\{D^+_{p,q}\}$ von V^+, d.h. eine Familie von Unterräumen, die (6) und (7) erfüllt. Wir betrachten nun die *duale Zerlegung* $\{(D^+_{p,q})^*\}$ in V^- definiert durch:

$$\big(D^+_{p,q}\big)^* \subset V^- \quad \text{und} \quad \big(D^+_{p,q}\big)^* \perp_a D^+_{l,k} \quad \forall\,(l,k) \neq (p,q) \tag{18}$$

$\boldsymbol{D^-_{p,q} := \left(D^+_{n-q+1,n-p+1}\right)^*}$ **ist** $\boldsymbol{(V^-, N^-)}$**-angepasst:**

$$\begin{aligned} a\left(D^-_{p,q}, \operatorname{rg} N^q\right) &= a\Big(\left(D^+_{n-q+1,n-p+1}\right)^*, \bigoplus\nolimits_{l\le n-q,\, l\le n} D^+_{l,k}\Big) \overset{(18)}{=} \{0\} \\ &\Rightarrow \quad D^-_{p,q} \subset (\operatorname{rg} N^q)^\perp = \ker N^q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\left(D^-_{p,q}, \ker N^{n-p}\right) &= a\Big(\left(D^+_{n-q+1,n-p+1}\right)^*, \bigoplus\nolimits_{l\le n,\, k\le n-p} D^+_{l,k}\Big) \overset{(18)}{=} \{0\} \\ &\Rightarrow \quad D^-_{p,q} \subset \ker(N^p)^\perp = \operatorname{rg} N^p \end{aligned}$$

d.h. $D^-_{p,q} \subset V_{p,q} \cap V^- = V^-_{p,q}$. Da aber $D^-_{p,q} \cap D^-_{l,k} = \{0\}$ für $(p,q) \neq (l,k)$ und $\dim(D^-_{p,q}) = \dim(D^+_{n-q+1,n-p+1}) = \dim(D^+_{p,q})$ (beachte: $N^{|n+1-p-q|}$ induziert einen Isomorphismus $D^+_{n-q+1,n-p+1} \simeq D^+_{p,q}$) sieht man leicht ein, dass (6) erfüllt ist.

Es bleibt die Eigenschaft $ND^-_{p,q} = D^-_{p-1,q-1}$ zu überprüfen:

$$\begin{aligned} a(ND^-_{p,q}, D^+_{l,k}) = a(D^-_{p,q}, ND^+_{l,k}) &= a(D^-_{p,q}, D^+_{l-1,k-1}) \neq \{0\} \\ \Leftrightarrow \quad (l,k) &= (n+1-(q-1), n+1-(p-1)) \end{aligned}$$

d.h. $ND^-_{p,q} \overset{(18)}{\subset} \left(D^+_{n+1-(q-1),n+1-(p-1)}\right)^* = D^-_{p-1,q-1}$. Diese Inklusion ist in Wirklichkeit eine Gleichheit, da $(D^-_{p,q}, D^+_{n-(q-1),n-(p-1)})$ singulär gepaart sind und nach obiger Gleichung damit auch $(ND^-_{p,q}, D^+_{n+1-(q-1),n+1-(p-1)})$. Damit ist (7) nachgewiesen.

$\boldsymbol{D_{p,q} := D^+_{p,q} \oplus D^-_{p,q}}$ **ist** $\boldsymbol{(V, N, a)}$**-angepasst und** $\boldsymbol{S}$**-invariant:**

Die metrische Eigenschaft (9) von $\{D_{p,q}\}$ ergibt sich aus (18). Die S-Invarianz von $D_{p,q}$ ergibt sich aus der von $D^\pm_{p,q}$.

□

2.2 Bemerkung. Es ist hervorzuheben, dass der invertierbare, halbeinfache, mit N vertauschende und schiefadjungierte Operator S die Konstruktion einer (V, N, a)-angepassten Zerlegung ohne die Verwendung von 1.7 ermöglicht. Weiter zeigt das vorhergehende Lemma, dass N^+ und N^- gleiche Jordansche Normalform haben, insbesondere also $d_k \equiv 0 \, mod \, 2$.

Für die Konstruktion angepasster Basen versehen wir die Räume $D_{n,k}$ mit der nicht ausgearteten Form $b^{k-1}|_{D_{n,k}}$ (siehe (11)) und bemerken, dass $S|_{D_{n,k}}$ schiefadjungiert ist bzgl. $b^{k-1}|_{D_{n,k}}$. Nach 1.6 sind die Räume $(D^+_{p,q}, D^-_{p,q})$ singulär gepaart bzgl. $b^{k-1}|_{D_{n,k}}$. Sei $\beta^+_{n,k}$ eine beliebige Basis in $D^+_{p,q}$ und $\beta^-_{n,k}$ die (anti-)duale Basis in $D^-_{p,q}$, dann gilt bzgl. der Basis $\beta_{n,k} = \{\beta^+_{n,k}, \beta^-_{n,k}\}$ in $D_{p,q}$:

$$\begin{aligned} Mat_{\beta_{n,k}}\left(b^{k-1}|_{D_{n,k}}\right) &= J^{\pm 1}_{d_k/2} := \begin{pmatrix} 0 & I_{d_k/2} \\ \pm I_{d_k/2} & 0 \end{pmatrix} \\ Mat_{\beta_{n,k}}\left(S|_{D_{n,k}}\right) &= \lambda \cdot I_{d_k/2,\, d_k/2} \end{aligned} \tag{19}$$

Die Fortsetzung dieser Basen auf ganz V mittels N gemäss (13) führt zu folgender Normalform, wobei oBdA $a \in S_2(V)$, da a und b beide nicht ausgeartet sind:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mu_B(x) = (x-\lambda)^n(x+\lambda)^n,\ (\lambda \neq 0): \\ &Mat_{\beta_k}(a|_{F_k}) = A_k\left(-1, J_{d_k/2}^{(-1)^{k-1}}\right), \\ &Mat_{\beta_k}(B|_{F_k}) = S_k\left(\lambda \cdot I_{d_k/2,\, d_k/2}\right) + N_k, \quad (1 \leq k \leq n) \end{aligned}} \tag{20}$$

3 Normalformen für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

In diesen Kapitel werden die Normalformen für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hergeleitet. Der wesentliche Unterschied zum Komplexen besteht darin, dass die B-invarianten und a-orthogonalen Räume $V_B(\lambda)$ eventuell grösser sind (siehe Tabelle auf Seite 10). Es sind also weitere Fallunterscheidungen vorzunehmen, die Ausnahmen bzgl. des Spektrums von B (im Sinne von "nicht generisch") berücksichtigen.

3.1 B sei a-selbstadjungiert

Nach 1.4 und 1.5 zerlegt sich V in die a-orthogonale und B-invariante direkte Summe $V = \bigoplus_{Im(\lambda)\geq 0} C_B(\lambda)$. Sei deshalb $V = C_B(\lambda)$. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $V = H_B(\lambda)$, so überträgt sich die Normalform (16) direkt auf den reellen Fall.

Es bleibt also der generische Fall $\boxed{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}$, d.h $V = C_B(\lambda) = Re\big(H_B(\lambda) \oplus H_B(\overline{\lambda})\big)$ zu untersuchen. Sei dazu $a_{\mathbb{C}}$ die komplex-bilineare Ausdehnung der nicht ausgearteten Form a auf $V_{\mathbb{C}}$. Dann ist

$$V_{\mathbb{C}} = V'_{\mathbb{C}} \oplus \overline{V'_{\mathbb{C}}} := H_{B_{\mathbb{C}}}(\lambda) \oplus \overline{H_{B_{\mathbb{C}}}(\lambda)} = \ker(S_{\mathbb{C}} - \lambda) \oplus \ker(S_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda})$$

eine $a_{\mathbb{C}}$-orthogonale, $N_{\mathbb{C}}$- und $S_{\mathbb{C}}$-invariante Zerlegung von $V_{\mathbb{C}}$. Sei nun $(D'_{\mathbb{C}})_{p,q}$ eine gemäss 1.7 konstruierte $(V'_{\mathbb{C}}, N_{\mathbb{C}}|_{V'_{\mathbb{C}}}, a_{\mathbb{C}}|_{V'_{\mathbb{C}}})$-angepasste Zerlegung. Dann ist

$$D_{p,q} = Re\big((D'_{\mathbb{C}})_{p,q} \oplus \overline{(D'_{\mathbb{C}})}_{p,q}\big) \tag{21}$$

eine (V, N, a)-angepasste und S-invariante Zerlegung. Auf $(D'_{\mathbb{C}})_{n,k}$ betrachten wir die nicht ausgeartete Form ${b_{\mathbb{C}}}^{k-1}(\cdot,\cdot) = a_{\mathbb{C}}(\cdot, {N_{\mathbb{C}}}^{k-1}(\cdot)) \in (S_2 \cup \Lambda_2)\big((D'_{\mathbb{C}})_{n,k}\big)$ und wählen eine Basis $\beta'_{n,k} = \{b'_1, \ldots, b'_{d_k/2}\}$ mit $Mat_{\beta'_{n,k}}({b_{\mathbb{C}}}^{k-1}) \in \{I_{d_k}, J_{d_k/2}\}$ (siehe (12)). Dann ist $\overline{\beta'_{n,k}} = \{\overline{b'_1}, \ldots, \overline{b'_{d_k/2}}\}$ eine Basis von $\overline{(D'_{\mathbb{C}})}_{n,k}$ und wir erhalten daraus eine Basis

$\beta_{n,k} = \{b_i\}$ von $D_{n,k}$ durch:

$$b_i := \begin{cases} \sqrt{2} \cdot Re(b'_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b'_i + \overline{b'_i}) & \text{für } \ 1 \leq i \leq d_k/2 \\ \sqrt{2} \cdot Im(b'_i) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(b'_i - \overline{b'_i}) & \text{für } \ d_k/2 + 1 \leq i \leq d_k \end{cases} \tag{22}$$

Unter Ausnutzung der Gleichung $a_{\mathbb{C}}(x,y) = a\big(Re(x), Re(y)\big) - a\big(Im(x), Im(y)\big) + i \cdot a\big(Re(x), Im(y)\big) + i \cdot a\big(Im(x), Re(y)\big)$ und der Orthogonalitätsrelation $a_{\mathbb{C}}(b'_i, \overline{b'_j}) = 0$ erhält man:

	$b^{k-1} \in S_2$	$b^{k-1} \in \Lambda_2$
$Mat_{\{\beta'_{n,k}, \overline{\beta'_{n,k}}\}}({b_{\mathbb{C}}}^{k-1})$	I_{d_k}	$\begin{pmatrix} J_{d_k/4} & \\ & J_{d_k/4} \end{pmatrix}$
$Mat_{\{\beta'_{n,k}, \overline{\beta'_{n,k}}\}}(S_{\mathbb{C}})$	$\begin{pmatrix} \lambda \cdot I_{d_k/2} & \\ & \overline{\lambda} \cdot I_{d_k/2} \end{pmatrix}$	
$Mat_{\beta_{n,k}}(b^{k-1})$	$I_{d_k/2, d_k/2}$	$\begin{pmatrix} J_{d_k/4} & \\ & -J_{d_k/4} \end{pmatrix}$
$Mat_{\beta_{n,k}}(S)$	$\begin{pmatrix} \xi \cdot I_{d_k/2} & -\nu \cdot I_{d_k/2} \\ \nu \cdot I_{d_k/2} & \xi \cdot I_{d_k/2} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \xi + i\nu$	

Es ist festzuhalten, dass in der vorliegenden Situation $\mathrm{sig}(b^{k-1}) = (d_k/2, d_k/2)$ für $b^{k-1} \in S_2$ und $d_k \equiv 0 \; mod \; 4$ für $b^{k-1} \in \Lambda_2$. Mittels (13) erhalten wir eine Basis[†] β von ganz V und damit die folgende Normalform:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu_B(x) = \big(x - \lambda\big)^n \big(x - \overline{\lambda}\big)^n, \quad \lambda = \xi + i\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} : \\ Mat_{\beta_k}(a|_{F_k}) = A_k\big(+1, \begin{pmatrix} M_k & \\ & -M_k \end{pmatrix} \big), \\ Mat_{\beta_k}(B|_{F_k}) = S_k\big(\begin{pmatrix} \xi \cdot I_{d_k/2} & -\nu \cdot I_{d_k/2} \\ \nu \cdot I_{d_k/2} & \xi \cdot I_{d_k/2} \end{pmatrix} \big) + N_k \\ M_k \in \big\{ I_{d_k/2}, J_{d_k/4} \big\} \text{ entsprechend dem Typ von } a, \ (1 \leq k \leq n) \end{array}} \tag{23}$$

[†]Dieselbe Basis ergibt sich natürlich aus einer Basis $\beta'_{\mathbb{C}}$, die die Normalform (16) des Paares $(a_{\mathbb{C}}|_{V'_{\mathbb{C}}}, B_{\mathbb{C}}|_{V'_{\mathbb{C}}})$ realisiert, durch Übergang zu einer reellen Basis analog zu (22). Der (Um-)Weg über die Formen b^{k-1} hat den Vorteil, dass zum einem die Invarianten deutlich zu Tage treten, zum anderen die Gestalt der Matrizen sofort abzulesen ist.

3.2 B sei a-schiefadjungiert

Nach 1.4 und 1.6 zerlegt sich V in die a-orthogonale und B-invariante direkte Summe von Räumen $V_B(\lambda)$, $(Re(\lambda), Im(\lambda) \geq 0)$, wobei $V_B(\lambda)$ jeweils einem der Räume aus (1.3) entspricht. Sei also $V = V_B(\lambda)$.

Die Fälle $\lambda = 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (d.h. B zerfallend) führen vollkommen analog auf die für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ hergeleiteten Normalformen (17) bzw. (20).

Sei nun $\boxed{\lambda \in i\mathbb{R}^*}$. Nach Komplexifizierung erhält man die bzgl. $a_\mathbb{C}$ singulär gepaarten Räume $V_\mathbb{C}^\pm = \ker(S_\mathbb{C} \mp \lambda)$, wobei $a_\mathbb{C}$ die $\mathbb{C}$-bilineare Erweiterung von a ist. Im Unterschied zu Lemma 2.1 existiert hier eine kanonische Dualitätsabbildung, nämlich die reelle Struktur κ:

$$\kappa\left(V_\mathbb{C}^+\right) = \overline{V_\mathbb{C}^+} = \overline{\ker(S_\mathbb{C} - \lambda)} = \ker(S_\mathbb{C} - \overline{\lambda}) \overset{\lambda \in i\mathbb{R}}{=} \ker(S_\mathbb{C} + \lambda) = V_\mathbb{C}^-$$

d.h. bzgl. der *sesquilinearen* Erweiterung $\overline{a}_\mathbb{C}(\cdot,\cdot) := a_\mathbb{C}(\cdot, \overline{\cdot})$ von a ist $V_\mathbb{C}^+$ nicht ausgeartet. Nun wenden wir 1.7 an und erhalten eine $(V_\mathbb{C}^+, N_\mathbb{C}|_{V_\mathbb{C}^+}, \overline{a}_\mathbb{C}|_{V_\mathbb{C}^+})$-angepasste Zerlegung $(D_\mathbb{C}^+)_{p,q}$ sowie die (V, N, a)-angepasste und S-invariante Zerlegung

$$D_{p,q} := Re\big((D_\mathbb{C}^+)_{p,q} \oplus \overline{(D_\mathbb{C})^+}_{p,q}\big) \tag{24}$$

3.1 Bemerkung. Die Zerlegung $D_{p,q}$ kann unter zwei Gesichtspunkten gesehen werden, was darin begründet liegt, dass hier $\overline{\lambda}$ und $-\lambda$ zusammenfallen. Zum einen ist $(D_\mathbb{C}^-)_{p,q} := \overline{(D_\mathbb{C}^+)}_{p,q}$ eine $(V_\mathbb{C}^-, N_\mathbb{C}|_{V_\mathbb{C}^-}, \overline{a}_\mathbb{C}|_{V_\mathbb{C}^-})$-angepasste Zerlegung, da $N_\mathbb{C}$ mit der reellen Struktur κ kommutiert und κ orthogonalitätserhaltend ist. Nach diesem Schema wurde die Zerlegung (21) konstruiert.

Andererseits ist $\big((D_\mathbb{C}^+)_{p,q}\big)^* := \overline{(D_\mathbb{C}^+)}_{n-q+1,n-p+1}$ eine bzgl. $a_\mathbb{C}$ duale Zerlegung im Sinne von (18) und die dortige Definition $(D_\mathbb{C}^-)_{p,q} := \big((D_\mathbb{C}^+)_{n-q+1,n-p+1}\big)^* = \overline{(D_\mathbb{C}^+)}_{p,q}$ führt abermals auf dieselbe Zerlegung. Im Gegensatz zu Lemma 2.1 muss hier aber vom "Herzstück" der hier vorgestellten Theorie, der rekursiv definierten angepassten Zerlegun 1.7 Gebrauch gemacht werden (Vgl. Bemerkung 2.2). □

Die Konstruktion angepasster Basen orientiert sich ebenfalls am Abschnitt 3.1 (S.21). Auf $(D_\mathbb{C}^+)_{n,k}$ betrachten wir die nicht ausgeartete Form

$$\overline{b}_\mathbb{C}{}^{k-1}(\cdot,\cdot) := \overline{a}_\mathbb{C}(\cdot, N_\mathbb{C}{}^{k-1}(\cdot)) \ \in \ \big(\overline{S}_2 \cup \overline{\Lambda}_2\big)\left((D_\mathbb{C})_{n,k}\right)$$

und wählen eine Basis $\beta_{n,k}^+ = \{b_1^+, \ldots, b_{d_k/2}^+\}$ mit $Mat_{\beta_{n,k}^+}(\overline{b}_\mathbb{C}{}^{k-1}) \in \{I_{p_k,q_k}, -i \cdot I_{p_k,q_k}\}$ (siehe (12)). Dann ist $\beta_{n,k} = \{b_i\}$ eine Basis von $D_{p,q}$, wobei:

$$b_i := \begin{cases} \sqrt{2} \cdot Re(b_i^+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_i^+ + \overline{b_i^+}) & \text{für } \ 1 \leq i \leq d_k/2 \\ \sqrt{2} \cdot Im(b_i^+) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(b_i^+ - \overline{b_i^+}) & \text{für } \ d_k/2 + 1 \leq i \leq d_k \end{cases} \tag{25}$$

Unter Ausnutzung der Gleichung $\overline{a}_{\mathbb{C}}(x,y) = a\big(Re(x), Re(y)\big) + a\big(Im(x), Im(y)\big) - i \cdot a\big(Re(x), Im(y)\big) + i \cdot a\big(Im(x), Re(y)\big)$ und der Orthogonalitätsrelation $\overline{a}_{\mathbb{C}}(b'_i, \overline{b'_j}) = 0$ erhält man:

	$b^{k-1} \in S_2$	$b^{k-1} \in \Lambda_2$
$Mat_{\{\beta^+_{n,k}, \overline{\beta^+_{n,k}}\}}(\overline{b}_{\mathbb{C}}{}^{k-1})$	$\begin{pmatrix} & I_{r_k,s_k} \\ I_{r_k,s_k} & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & -i \cdot I_{r_k,s_k} \\ i \cdot I_{r_k,s_k} & \end{pmatrix}$
$Mat_{\{\beta^+_{n,k}, \overline{\beta^+_{n,k}}\}}(S_{\mathbb{C}})$	$\begin{pmatrix} \lambda \cdot I_{d_k/2} & \\ & -\lambda \cdot I_{d_k/2} \end{pmatrix}$	
$Mat_{\beta_{n,k}}(b^{k-1})$	$\begin{pmatrix} & I_{r_k,s_k} \\ I_{r_k,s_k} & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & I_{r_k,s_k} \\ -I_{r_k,s_k} & \end{pmatrix}$
$Mat_{\beta_{n,k}}(S)$	$\begin{pmatrix} & -\nu \cdot I_{d_k/2} \\ \nu \cdot I_{d_k/2} & \end{pmatrix}, \quad \lambda = i\nu$	

wobei $r_k + s_k = d_k/2$, d.h. $d_k \equiv 0 \, mod \, 2$, $\forall \, k$. Mittels (13) erhalten wir eine Basis β von ganz V und damit die folgende Normalform (wobei a oBdA symmetrisch):

$$\boxed{\begin{aligned} &\mu_B(x) = \big(x - i\nu\big)^n \big(x + i\nu\big)^n, \quad \nu \in \mathbb{R}^* : \\ &Mat_{\beta_k}(a|_{F_k}) = \begin{cases} A_k\big(-1, \begin{pmatrix} & I_{r_k,s_k} \\ I_{r_k,s_k} & \end{pmatrix}\big) & \text{für } k \equiv 1 \, mod \, 2 \\ A_k\big(-1, \begin{pmatrix} & I_{r_k,s_k} \\ -I_{r_k,s_k} & \end{pmatrix}\big) & \text{für } k \equiv 0 \, mod \, 2 \end{cases} \\ &Mat_{\beta_k}(B|_{F_k}) = S_k\big(\begin{pmatrix} & -\nu \cdot I_{d_k/2} \\ \nu \cdot I_{d_k/2} & \end{pmatrix}\big) + N_k, \quad r_k + s_k = d_k/2 \end{aligned}} \tag{26}$$

Der Fall $\boxed{\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})}$ ist der letzte noch verbliebene. Bezeichne $V_{\mathbb{C}}^{\pm} = \ker(S_{\mathbb{C}} \mp \lambda)$. Dann gilt:

$$V_{\mathbb{C}} \;=\; \underbrace{\left(V_{\mathbb{C}}^{+} \overset{\perp_{a_{\mathbb{C}}}}{\oplus} \overline{V_{\mathbb{C}}^{+}}\right) \oplus \left(V_{\mathbb{C}}^{-} \overset{\perp_{a_{\mathbb{C}}}}{\oplus} \overline{V_{\mathbb{C}}^{-}}\right)}_{\text{singulär gepaart bzgl. } a_{\mathbb{C}}}$$

Zunächst wenden wir Lemma 2.1 auf das Paar $(V_{\mathbb{C}}^{+} \oplus V_{\mathbb{C}}^{-}, B_{\mathbb{C}}|_{V_{\mathbb{C}}^{+} \oplus V_{\mathbb{C}}^{-}})$ an. Genauer erhalten wir die $S_{\mathbb{C}}$-invariante, $a_{\mathbb{C}}$-total isotrope und $(V_{\mathbb{C}}^{+}, N_{\mathbb{C}}|_{V_{\mathbb{C}}^{+}})$-angepasste Zerlegung $(D_{\mathbb{C}}^{+})_{p,q}$ sowie deren Dual $(D_{\mathbb{C}}^{-})_{p,q} = \left((D_{\mathbb{C}}^{+})_{n-q+1,n-p+1}\right)^{*}$. Analog zu (21) definieren wir dann folgende (V, N, a)-angepasste und S-invariante Zerlegung:

$$D_{p,q} := Re\left((D_{\mathbb{C}}^{+})_{p,q} \oplus \overline{(D_{\mathbb{C}}^{+})_{p,q}} \oplus (D_{\mathbb{C}}^{-})_{p,q} \oplus \overline{(D_{\mathbb{C}}^{-})_{p,q}}\right)$$

Für die Konstruktion angepasster Basen in $D_{p,q}$ gehen wir wie folgt vor: Sei ${\beta'}^{+}_{n,k}$ eine Basis von $(D_{\mathbb{C}}^{+})_{n,k}$, sowie ${\beta'}^{-}_{n,k}$ die bzgl. ${b_{\mathbb{C}}}^{k-1}$ (anti-)duale Basis in $(D_{\mathbb{C}}^{-})_{n,k}$ (siehe (19)). Dann ist

$$\beta_{n,k} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} Re\left({\beta'}^{+}_{n,k}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} Re\left({\beta'}^{-}_{n,k}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} Im\left({\beta'}^{+}_{n,k}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} Im\left({\beta'}^{-}_{n,k}\right)\right\}$$

eine Basis von $D_{n,k}$. Durch Fortsetzen der Basen mittels (13) erhalten wir eine Basis β von ganz V und damit die folgende Normalform (wobei a oBdA symmetrisch):

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mu_B(x) = \left(x-\lambda\right)^n \left(x+\lambda\right)^n \left(x-\overline{\lambda}\right)^n \left(x+\overline{\lambda}\right)^n, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) : \\
&Mat_{\beta_k}(a|_{F_k}) = A_k\Big(-1, \begin{pmatrix} & I_{\delta_k,\delta_k} \\ (-1)^{k-1} \cdot I_{\delta_k,\delta_k} & \end{pmatrix}\Big) \\
&Mat_{\beta_k}(B|_{F_k}) = S_k\Big(\begin{pmatrix} \Lambda & \\ & -\Lambda \end{pmatrix}\Big) + N_k \\
&\text{wobei } \Lambda = \begin{pmatrix} \xi \cdot I_{\delta_k} & -\nu \cdot I_{\delta_k} \\ \nu \cdot I_{\delta_k} & \xi \cdot I_{\delta_k} \end{pmatrix} \text{ und } \quad \delta = d_k/4
\end{aligned}} \tag{27}$$

4 Zusammenfassung

Wir fassen hier nochmal den für die Anwendung in der Differentialgeometrie sicherlich wichtigsten Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und a symmetrisch tabellarisch zusammen:

Sei (V, a, B) ein Tripel bestehend aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V, einer nichtausgearteten, symmetrischen Bilinearform a und einem bezüglich a selbst- bzw. schiefadjungierten Operator B. Dann Zerlegt sich V in die a-orthogonale und B-invariante direkte Summe der auf Seite 10 angegebenen Unterräume $V_B(\lambda)$[†].

Sei jetzt $V = V_B(\lambda)$ und $B = S + N$ die Jordan-Chevalley-Zerlegung von B. Dann existiert eine (V, a, B)-angepasste Basis β von V bezüglich der $Mat_\beta(a)$, $Mat_\beta(S)$ und $Mat_\beta(N)$ folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} Mat_\beta(a) &= diag\big(A_1(\epsilon, M_1), \ldots, A_n(\epsilon, M_n)\big) \\ Mat_\beta(S) &= diag\big(S_1(L_1), \ldots, S_n(L_n)\big) \\ Mat_\beta(N) &= diag\big(N_1, \ldots, N_n\big) \end{aligned}$$

Dabei ist $\epsilon \in \pm 1$, $M_k, L_k \in Mat_{(d_k,d_k)}(\mathbb{R})$ entsprechend der Tabelle auf Seite 27, n der Nilindex von N und $A_k(\epsilon, M_k)$, $S_k(L_k)$, $N_k \in M_{(k \cdot d_k, k \cdot d_k)}(\mathbb{R})$ Matrizen mit k Blöcken der Länge d_k von der folgenden Gestalt:

$$A_k(\epsilon, M_k) = \begin{pmatrix} & & & \epsilon^{k-1} \cdot M_k \\ & & \iddots & \\ & \epsilon \cdot M_k & & \\ M_k & & & \end{pmatrix}$$

$$S_k(L_k) = \begin{pmatrix} L_k & & & \\ & L_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_k \end{pmatrix} \qquad N_k = \begin{pmatrix} 0 & I_{d_k} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & I_{d_k} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung von a und B als Matrizen enthält nur die in der Tabelle auf Seite 27 aufgeführten Invarianten des Paares (a, B) und kann somit als Normalform bezeichnet werden. Mit anderen Worten:

> Sei β eine (V, a, B)-angepasste Basis, so sind $Mat_\beta(a)$ und $Mat_\beta(B)$ invariant unter Konjugation mit Elementen aus $\Omega = stab(a) \cap stab(B)$.

[†]Dieses sind genau die bzgl. a nicht ausgearteten und unter der Wirkung von $stab(a) \cap stab(b)$ invarianten und unzerlegbaren Unterräume, wobei $b := a(\cdot, B(\cdot))$ ([Bou00, Cor.5, S.96])

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und a symmetrisch

Typ von B	Minimalpolynom $\mu_B(x)$	$M_k, \quad (1 \le k \le n)$	$L_k, \quad (1 \le k \le n)$	Invarianten von (a, B)	$\mathrm{sig}(a)$
$B = B^*$ $(\epsilon = +1)$	$(x-\lambda)^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$	I_{p_k,q_k}	$\lambda \cdot I_{d_k}$	$p_k + q_k = d_k \in \mathbb{N}_0$	S
	$(x-\lambda)^n(x-\overline{\lambda})^n,$ $\lambda = \xi + i\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	I_{δ_k,δ_k}	$\Lambda_{\delta_k}(\xi,\nu)$	$2\delta_k = d_k \in 2\mathbb{N}_0$	*Split*
$B = -B^*$ $(\epsilon = -1)$	$x^n, \quad (\lambda = 0)$	$I_{q_k,p_k} \quad (k \equiv 1 \, mod \, 2)$ $J_{d_k/2} \quad (k \equiv 0 \, mod \, 2)$	0	$p_k + q_k = d_k \in \mathbb{N}_0 \quad (k \equiv 1 \, mod \, 2)$ $d_k \in 2\mathbb{N}_0 \quad (k \equiv 0 \, mod \, 2)$	S
	$\big(x - i\nu\big)^n \big(x + i\nu\big)^n,$ $i\nu \in i\mathbb{R}^*$	$\begin{pmatrix} I_{r_k,s_k} & \\ & I_{r_k,s_k} \end{pmatrix} \quad (k \equiv 1 \, mod \, 2)$ $\begin{pmatrix} & I_{r_k,s_k} \\ -I_{r_k,s_k} & \end{pmatrix} \quad (k \equiv 0 \, mod \, 2)$	$\Lambda_{d_k/2}(0,\nu)$	$2(r_k + s_k) = d_k \in 2\mathbb{N}_0$ $(q_k = 2r_k, \; p_k = 2s_k)$	S
	$\big(x - \lambda\big)^n \cdot \big(x - \lambda\big)^n,$ $\lambda \in \mathbb{R}^*$	$\begin{pmatrix} & I_{\delta_k} \\ (-1)^{k-1} \cdot I_{\delta_k} & \end{pmatrix}$	$\lambda \cdot I_{\delta_k,\delta_k}$	$2\delta_k = d_k \in 2\mathbb{N}_0$	*Split*
	$\big(x - \lambda\big)^n \big(x + \lambda\big)^n \ldots$ $\ldots \big(x - \overline{\lambda}\big)^n \big(x + \overline{\lambda}\big)^n,$ $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} & I_{\delta_k,\delta_k} \\ (-1)^{k-1} \cdot I_{\delta_k,\delta_k} & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \Lambda_{\delta_k}(\xi,\nu) & \\ & -\Lambda_{\delta_k}(\xi,\nu) \end{pmatrix}$	$4\delta_k = d_k \in 4\mathbb{N}_0$	*Split*

$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}, \quad J_d = \begin{pmatrix} & I_d \\ -I_d & \end{pmatrix}, \quad \Lambda_d(\xi,\nu) = \begin{pmatrix} \xi \cdot I_d & -\nu \cdot I_d \\ \nu \cdot I_d & \xi \cdot I_d \end{pmatrix}, \quad S = \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \big(p_{2k-1}, q_{2k-1}\big) + \sum_{k=1}^{n} \big([k/2] \cdot d_k, [k/2] \cdot d_k\big), \quad Split = \sum_{k=1}^{n} \big(k \cdot d_k/2, k \cdot d_k/2\big)$

Schlussbemerkung

Die Invarianzgruppe $\Omega = stab(a) \cap stab(B)$ kann im allgemeinen nicht explizit angegeben werden. Man kann aber, wie weiter oben erwähnt, Ω dadurch charakterisieren, dass es auf bestimmten mit dem Paar (a, B) assoziierten Objekten einfach transitiv wirkt. Dieses Wissen genügt letztendlich, um die Ω-invarianten Räume zu bestimmen. Für $B = N$ sind das gerade Summen der Räume $V_{p,q}$ ([Bou00, Prop.2, S.53]).

Eine weiterführende Frage wäre z.B. die nach simultanen Normalformen eines Tupels $(a, B_1, \ldots, B_m)$, wobei alle B_i selbstadjungiert sind und $[B_i, B_j] = 0$.

Literatur

[Bou00] Ch. Boubel, *Sur l'holonomy des variétés pseudo-riemanniennes - chapitre 2: Réduction simultanée de deux formes bilinéaires, symétriques ou anti-symétriques, dont l'une est non dégénérée*, Ph.D. thesis, Insitut Elie Cartan (Nancy), 2000, normal-forms for self-/skew-adjoint operators w.r.t. an indefinite inner product.

[Hei90] W. Hein, *Einführung in die struktur- und darstellungstheorie der klassischen gruppen*, Springer, 1990.

[Kli54] W. Klingenberg, *Paare symmetrischer und alternierender Formen zweiten Grades*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. **19** (1954), 78–93.

[Koe85] M. Koecher, *Lineare algebra und analytische geometrie*, Springer, 1985, historische Zusammenhänge, gute Heranführung an die Jordansche Normalform.