Endliche Simplizialkomplexe

Definition 1 (Simplex). Sei $E = \{e_0, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^N$ eine Menge von $n+1$ affin unabhängigen Punkten und $A = e_0 + span\{e_i - e_0\}_{i=1}^n$ der davon aufgespannte affine Raum. $x \in A$ hat eine eindeutige Darstellung

$$\begin{aligned} x &= e_0 + \lambda_1(e_1 - e_0) + \ldots + \lambda_n(e_n - e_0) \\ &= \lambda_0 e_0 + \ldots + \lambda_n e_n \end{aligned}$$

mittels der **baryzentrischen Koordinaten** $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Die konvexe Hülle der Menge E lässt sich nun schreiben als

$$conv(E) = \Big\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \,\Big|\, \lambda_i \geq 0,\ \lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1 \Big\}$$

$\Delta^n := conv(E)$ ist ein ***n*-Simplex** mit **Seiten** $conv(E')$, $E' \subset E$. Ferner bezeichne $\partial\Delta^n := \big\{ conv(E') \,\big|\, E' \subset E,\ E' \neq E \big\}$ den **Rand** und ${}^\circ\Delta^n$ das **Innere**. Konvention: $\Delta^{-1} = \emptyset$.

Definition 2 (Triangulierung). Sei X ein kompakter T_2-Raum. Eine Triangulierung von X besteht aus stetigen Abbildungen $\sigma_i : \Delta^{n(i)} \to X$, $i = 0, 1, \ldots, N$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\sigma_i : {}^\circ\Delta^{n(i)} \to \sigma_i({}^\circ\Delta^{n(i)}) =: e_i$ ist ein Homöomorphismus.

(ii) $X = \dot{\bigcup}_{i=1}^n e_i$

(iii) Sei $\Delta^k \subset \Delta^{n(i)}$ eine Seite, dann existiert ein j mit $\sigma_i(\Delta^k) = \sigma_j(\Delta^{n(j)})$.

(iv) $\sigma_i : \Delta^{n(i)} \to X$ ist injektiv.

(v) $e_0 = \emptyset$, also $n(0) = -1$.

(vi) Für alle i, j existiert genau ein k mit $\overline{e_i} \cap \overline{e_j} = \overline{e_k}$.

Bemerkung: Identifiziert man $\Delta^n \simeq D^n$, so folgt aus (i)-(iii), dass X ein CW-Komplex mit charakteristischen Abbildungen $\{\sigma_i\}$ ist. CW-Komplexe mit der zusätzlichen Eigenschaft (iv) heissen *regulär*.

Definition 3 (Geometrischer Simplizialkomplex). Dies ist eine endliche Menge $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i=1}^N$ von Simplices $S_i \subset \mathbb{R}^K$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset \in \mathcal{S}$.

(ii) Alle Seiten von S_i liegen wieder in $\mathcal{S}$.

(iii) $S_i \cap S_j$ ist Seite von S_i und S_j.

Die Vereinigung aller Simplices $|\mathcal{S}| := \bigcup_{i=1}^N S_i$ heisst **Polyeder**. Auf $|\mathcal{S}| \subset \mathbb{R}^K$ betrachten wir die induzierte Topologie.

Definition 4 (Kombinatorischer Simplizialkomplex). Dies ist ein System von Teilmengen $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ einer endlichen Menge $E = \{e_0, \ldots, e_N\}$ von **Ecken** mit folgender Eigenschaft:

(i) $K \in \mathcal{K}$ und $K' \subset K$, dann gilt $K' \in \mathcal{K}$.

$\mathcal{K}$ wird ein topologischer Raum $|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^N$ zugeordnet wie folgt:

$$|\mathcal{K}| := \Big\{ \lambda \in \mathbb{R}^N \;\Big|\; \lambda_0 + \ldots + \lambda_N = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ \big\{ e_i \in E \,\big|\, \lambda_i > 0 \big\} \in \mathcal{K} \Big\}$$

Satz. Die Definitionen **2**, **3** und **4** sind im folgenden Sinne äquivalent:

- Sei $\mathcal{S}$ ein geom. Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^K$. Seine Ecken $E = \{e_i\}_{i=1}^N$ sei die Menge der 0-Simplices e_i und
$$\mathcal{K} := \big\{ S_i \cap E \,\big|\, S_i \in \mathcal{S} \big\}$$
Dann ist $\mathcal{K}$ ein komb. Simplizialkomplex und $|\mathcal{S}| \subset \mathbb{R}^K$ ist homöomorph zu $|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^N$.

- Sei $\mathcal{K}$ ein komb. Simplizialkomplex, dann ist $|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^N$ bereits ein geom. Simplizialkomplex.

  Bemerkung: Einen komb. Simplizialkomplex mit Simplizes der Dimension $\leq k$ kann man sogar als geom. Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^{2k+1}$ realisieren (siehe z.B. *Pontrjagin, Stillwell*).

- Sei eine Triangulierung von X gegeben. Definiere $E = \big\{ \sigma_i(\Delta^0) \,\big|\, n(i) = 0 \big\}$ und
$$\mathcal{K} := \big\{ \sigma_i(\Delta^{n(i)}) \cap E \big\}_{i=1}^N$$
Dann ist $\mathcal{K}$ ein komb. Simplizialkomplex und X ist homöomorph zu $|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^N$.

- Sei $\mathcal{S}$ ein geom. Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^K$. Dann ist $|\mathcal{S}| \subset \mathbb{R}^K$ ein kompakter T_2-Raum und die kanonischen Einbettungen der Simplices $\sigma_i : S_i \to |S|$ ergibt eine Triangulierung von X.