21. März 2006

Unterhaltung zweier Mathematiker

Problem:
Gott überlegt sich zwei natürliche Zahlen $m, n \geq 2$ mit einer wahrhaft wundervollen Eigenschaft. Zwei Mathematiker, Sigmar (Σ) und Pia (Π), betraut er nun mit der Aufgabe, diese herauszufinden, indem er Sigmar die Summe $s_0 = m + n$ und Pia das Produkt $p_0 = m \cdot n$ der beiden Zahlen verrät. Nach einer Weile brechen die Beiden ihr Schweigen und wir werden Zeugen folgender Unterhaltung:

Sigmar: *Du kannst meine Zahl nicht kennen.*
Pia: *Oh, jetzt kenne ich sie!*
Sigmar: *Dann kenne ich Deine aber auch.*

Da Sigmar und Pia nun die Zahlen m, n kannten, waren sie mit sich und der Welt zufrieden und verstummten. Gott erkannte, dass alle anderen Menschen, die nur von obiger Unterhaltung wussten, Summe und Produkt selbst aber nicht kannten, noch nicht im Besitz der Lösung sein konnten und gab folgenden Tipp: $m, n \leq 100$. Sigmar und Pia nickten und gaben so zu erkenne, dass ihre Aussagen immer noch Gültigkeit hatten. Kennst Du nun m und n?

Antwort:
Wir werten zunächst die erste Behauptung von Sigmar aus: Pia wüsste die Zahlen m, n und damit deren Summe genau dann wenn m, n Primzahlen wären (Primfaktorzerlegung von p_0). Also ist sich Sigmar sicher, dass seine Zahl s_0 nicht die Summe zweier Primzahlen ist. Es stellt sich also umgekehrt die Frage, welche Zahlen sich als Summe zweier Primzahlen schreiben lassen. Die bis heute nicht bewiesene Goldbachsche-Vermutung (1742) besagt, dass dies für alle geraden Zahlen grösser als 2 zutrifft. Für die hier infrage kommenden Zahlen ist sie natürlich längst überprüft. Weiter ist eine ungerade Zahl die Summe zweier Primzahlen genau dann wenn eine davon die 2 ist. Also können wir die erste Aussage zusammenfassen als $s_0 \in S$ mit

$$\begin{aligned} S &= \left\{ s \geq 4 \,\middle|\, s \text{ nicht Summe zweier Primzahlen} \right\} \\ &= \left\{ 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53, 57, 59, 65, \dots \right\} \end{aligned}$$

Nun betrachtet sich Pia alle möglichen Darstellungen ihrer Zahl als Produkt $p_0 = s_1 \cdot s_2$ und verwirft diese, falls $s_1 + s_2 \notin S$. Ihrer Behauptung nach hat sie damit eine eindeutige Zerlegung ihrer Zahl p_0 gefunden, d.h. $p_0 \in P$ mit

$$P = \left\{ p \geq 4 \,\middle|\, \exists!\, s_1, s_2 \text{ mit } s_1 \cdot s_2 = p \text{ und } s_1 + s_2 \in S \right\}$$

Die Menge P erhält man also wie folgt: Man wählt sich ein $s \in S$ und stellt es als Summe $s_1 + s_2 = s$ dar. Sodann Untersucht man *alle* möglichen Darstellungen von $s_1 \cdot s_2 = p_1 \cdot p_2$ als Produkt. Falls $p_1 + p_2 \in S$ nur für die Zerlegung $\{p_1, p_2\} = \{s_1, s_2\}$, so ist $p \in P$. Für $11 \in S$ erhalten wir z.B.

$$\begin{array}{rcccr} 11 & = & 2+9 & 2 \cdot 9 = 6 \cdot 3 & 6+3 \notin S \\ & = & 3+8 & 3 \cdot 8 = 6 \cdot 4 = 12 \cdot 2 & 6+4, 12+2 \notin S \\ & = & 4+7 & 4 \cdot 7 = 2 \cdot 14 & 2+14 \notin S \\ & = & 5+6 & 5 \cdot 6 = 15 \cdot 2 & 15+2 = 17 \in S \end{array}$$

also gibt es für $s = 11$ die drei Möglichkeiten $p = 18, 24, 28$ die Pia den eindeutigen Rückschluss

auf $s = 11$ erlauben. Für $17 \in S$ erhalten wir

$$\begin{array}{rclrr}
17 & = & 2+15 & 2\cdot 15 = 5\cdot 6 & 5+6 = 11 \in S \\
17 & = & 3+14 & 3\cdot 14 = 21\cdot 2 & 21+2 = 23 \in S \\
17 & = & 4+13 & 4\cdot 13 = 2\cdot 26 & 2+26 \notin S \\
17 & = & 5+12 & 5\cdot 12 = 20\cdot 3 & 20+3 = 23 \in S \\
17 & = & 6+11 & 6\cdot 11 = 2\cdot 33 & 2+33 = 35 \in S \\
17 & = & 7+10 & 7\cdot 10 = 35\cdot 2 & 35+2 = 37 \in S \\
17 & = & 8+9 & 8\cdot 9 = 24\cdot 3 & 24+3 = 27 \in S
\end{array}$$

also gibt es für $s = 17$ nur $p = 4\cdot 13 = 52$, dass Pia den eindeutigen Rückschluss auf $s = 17$ erlaubt.

Betrachten wir nun die letzte Aussage Sigmars, er kenne nun Pias Zahl. Gesucht ist also ein $s \in S$, so dass es nur eine Summendarstellung $s = s_1 + s_2$ derart gibt, dass das zugehörige Produkt $p = s_1 \cdot s_1$ wieder eindeutig auf die Summe s verweist in dem Sinne, dass für alle anderen Produktdarstellungen $p = p_1 \cdot p_2$ die zugehörige Summe $p_1 + p_2$ nicht in S liegt. Das Paar $s = 17$, $p = 52$ kommt hierfür in Frage. Also wäre $m = 4$, $n = 13$ eine mögliche Antwort. Es bleibt zu zeigen, dass dies die einzig mögliche ist unter der Zusatzvoraussetzung $m, n \leq 100$.

Man muss also für alle anderen $s \in S$ mindestens zwei Zerlegungen $s = s_1 + s_2 = \widetilde{s}_1 + \widetilde{s}_2$ finden, deren Produkte eindeutig von diesen Zahlen kommt. Eine einfache Strategie hierbei ist die folgende: findet man ein $k > 1$, so dass $q = s - 2^k$ eine Primzahl ist, dann kommt $p = 2^k \cdot q$ eindeutig von dieser Zerlegung, denn alle anderen Darstellungen als Produkt sind von der Gestalt $2^{k-l} \cdot 2^l q$ und führen auf geradzahlige Summen, die nicht in S sein können. Auf diese Art können wir folgende $s \in S$ ausschliessen:

$$\begin{array}{rclcl}
11 & = & 2^2+7 & = & 2^3+3 \\
23 & = & 2^2+19 & = & 2^4+7 \\
27 & = & 2^2+23 & = & 2^4+11 \\
35 & = & 2^2+31 & = & 2^4+19 \\
37 & = & 2^3+29 & = & 2^5+5 \\
47 & = & 2^2+43 & = & 2^3+39 \\
51 & = & 2^2+47 & = & 2^3+43 \\
57 & = & 2^2+53 & = & 2^4+41 \\
 & & \dots & & \\
\end{array}$$

Für die Zahlen $17, 29, 41, 53, 65$ existiert jeweils genau eine Zerlegung der Form $s = 2^k + q$ mit q prim. Man muss daher noch eine weitere Zerlegung finden, deren Produkt eindeutig auf dieses Summe verweist. Für $s = 17$ ist dies nicht möglich, wie wir bereits wissen:

$$\begin{array}{rclrr}
29 & = & 2^4+13 = 2+27 & 2\cdot 27 = 6\cdot 9 = 18\cdot 3 & 6+9, 18+3 \notin S \\
41 & = & 2^2+37 = 2+39 & 2\cdot 39 = 6\cdot 13 = 26\cdot 3 & 6+13, 26+3 \notin S \\
53 & = & 2^4+37 = 5+48 & 5\cdot 48 = 15\cdot 16 & 15+16 \notin S \\
65 & = & 2^2+61 = \dots & &
\end{array}$$

Warum zögern wir an dieser Stelle, eine weitere Zerlegung für $s = 65$ anzugegen? Immerhin sind 32 solcher Zerlegungen auf ihre Eindeutigkeit hin zu untersuchen, aber ausser $4 + 61$ werden wir keine weitere finden. Nun sind aber $4, 61 \leq 100$. Und ein kleines Programm gibt uns noch weitere gültige Zahlen $m, n \leq 100$ an, nämlich $16, 73$ und $64, 73$. Was haben wir übersehen?

Sigmars bestätigung, dass seine Behauptung, Pia könne seine Zahl nicht kennen, auch nach dem Zusatz $m, n \leq 100$ richtig bleibt. Daraus folgt bereits $s \leq 53$. Denn angenommen $s \geq 55$, dann wählen wir eine Darstellung $s = 51 + q$. Betrachte nun das Produkt $p = 51 \cdot q$. Die einzige Zerlegung in Faktoren, die kleiner sind als 100 ist dann die angegebene und damit eindeutig. Dieses Argument schliesst die weiteren gefundenen Paare aus. Es bleibt:

$$s_0 = 17 \quad p_0 = 52 \qquad \text{bzw.} \qquad m = 4 \quad n = 13$$