Divergenz, Rotation und Scherung eines Vektorfeldes

1 Lineare Abbildungen

Betrachten wir zunächst einen reellen Vektorraum V mit Skalarprodukt g, sowie einen beliebigen Endomorphismus $L \in End(V)$. Der zu L adjungierte Operator $L^* \in End(V)$ ist charakterisiert durch

$$g\big(L(x), y\big) = g\big(x, L^*(y)\big), \quad \forall x, y \in V$$

Ferner heißt L **symmetrisch bzgl. g**, falls $L = L^*$ und **schief-symmetrisch bzgl. g**, falls $L = -L^*$. Ist $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine ONB von (V, g), d.h. $g(e_i, e_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$ $(\epsilon_i = \pm 1)$ und $L_{ij} = Mat_\beta(L)_{ij}$ die zugehörige Koordiatendarstellung von L, so gilt

$$L = \pm L^* \quad \Longleftrightarrow \quad L_{ij} = \pm \epsilon_i \epsilon_j L_{ji},$$

Schliesslich bezeichne $Tr(L) = \sum_i L_{ii}$ die **Spur** von L. Betrachte folgende Unterräume von $End(V)$:

$$S_0(V,g) := \big\{\, S \in End(V) \,\big|\, S = S^*,\ Tr(S) = 0 \big\} \quad \text{Spurfreie, symmetrische Operatoren}$$
$$\Lambda(V,g) := \big\{\, R \in End(V) \,\big|\, R = -R^* \big\} \quad \text{Schief-symmetrische Operatoren}$$

Lemma: Der Raum der Endomorphism über V zerlegt sich in die direkte Summe

$$End(V) \;=\; S_0(V,g) \;\oplus\; \Lambda(V,g) \;\oplus\; \mathbb{R} \cdot id \qquad (*)$$

Für $L \in End(V)$ sind die einzelnen Komponenten gegeben durch

$$L \;=\; \underbrace{\frac{(L + L^*)}{2} - \frac{Tr(L)}{n} id}_{:= S_0(L)} \;+\; \underbrace{\frac{(L - L^*)}{2}}_{:= \Lambda(L)} \;+\; \frac{Tr(L)}{n} id$$

Beweis. Es ist klar, dass die Summe $S_0(V,g) + \Lambda(V,g) + \mathbb{R} \cdot id \subset End(V)$ direkt ist. Zählt man ferner die Dimensionen auf beiden Seiten, so ergibt sich Gleichheit. □

Bemerkungen:

- $S_0(L)$ und $\Lambda(L)$ kommutieren genau dann wenn $L \cdot L^* = L^* \cdot L$, d.h. wenn L **normal** ist.
- Nach dem Satz von Riesz liefert das Skalarprodukt g eine Bijektion zwischen $End(V)$ und dem Raum der Bilinearformen $T^2(V)$ mittels

$$End(V) \ni L \quad \begin{array}{c} \sharp \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \flat \end{array} \quad g\big(L(\cdot), \cdot\big) \in T^2(V)$$

  Unter dieser Identifikation entspricht $S_0(V,g)^\sharp = S_0^2(V,g)$ den symmetrischen Bilinearformen mit verschwindender *metrischer Spur*, $\Lambda(V,g)^\sharp = \Lambda^2(V)$ den 2-Formen und $id^\sharp = g$.
- Die Wirkung von $SO(V,g) = \big\{\, Q \in GL(V) \,\big|\, Q \cdot Q^* = id,\ \det(Q) = 1 \big\}$ auf $End(V)$ mittels Konjugation $L \mapsto Q \cdot L \cdot Q^{-1}$ lässt die Zerlegung $(*)$ invariant und man kann zeigen, dass sich diese Darstellung auch nicht weiter zerlegen lässt.

2 Lineare Vektorfelder

Als nächstes möchten wir uns die obige Zerlegung eines Endomorphismus geometrisch veranschaulichen. Dafür ordnen wir jedem $L \in End(V)$ ein Vektorfeld $X_L \in \mathfrak{X}(V)$ auf V zu, wobei wir T_wV kanonich mit $T_0V \simeq V$ identifizieren:

$$X_L(w) := L(w)$$

Der Fluss $\Phi_t^{X_L}$ eines solchen **linearen Vektorfeldes** ist durch die Exponential-Abbildung auf $End(V)$ gegeben:

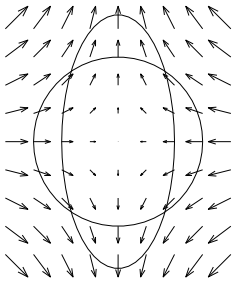
$$\Phi_t^{X_L}(w) = Exp(t \cdot L)(W)$$

denn $\frac{d}{dt}\big(Exp(t \cdot L)(w)\big)\big|_{t=0} = L(w) = X_L(w)$. Beschränken wir uns jetzt auf den **Riemannschen** Fall, d.h. g sei **positiv definit**.

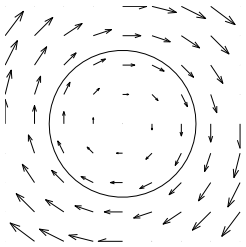
$L \in S_0(V,g)$ Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren besagt, dass es eine ONB $\beta = \{e_i\}$ aus Eigenvektoren von L gibt, d.h. $L(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$. Damit ist $Exp(tL)(e_i) = exp(t\lambda_i) \cdot e_i$. Ferner gilt

$$\det\big(Exp(tL)\big) = \prod_i exp(t\lambda_i) = exp\big(t\sum_i \lambda_i\big) = exp(t \cdot Tr(L)) = 1$$

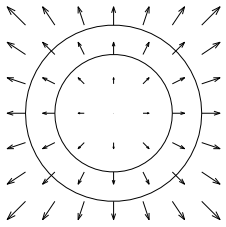
Also $L \in SL(V)$, d.h. $\Phi_t^{X_L}$ ist zusätzlich volumenerhaltend. Eine solche Abbildung nennt man **Scherung**.



$L \in \Lambda(V,g)$ In diesem Fall besagt die Jordansche Normalform, dass es eine ONB $\beta = \{e_1, f_1, \ldots, e_k, f_k, d_1, \ldots, d_l\}$ gibt, so dass $L\left(\begin{smallmatrix} e_i \\ f_i \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \lambda_i \\ -\lambda_i & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} e_i \\ f_i \end{smallmatrix}\right)$ und $L(d_i) = 0$. Dann ist $Exp(tL)\left(\begin{smallmatrix} e_i \\ f_i \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} cos(t\lambda_i) & sin(t\lambda_i) \\ -sin(t\lambda_i) & cos(t\lambda_i) \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} e_i \\ f_i \end{smallmatrix}\right)$, und $Exp(tL)(d_i) = d_i$, d.h. $Exp(tL) \in SO(V,g)$ ist eine **Drehung**.



$L = s \cdot id$ In diesem Fall ist $Exp(tL) = exp(ts) \cdot id$ eine **Streckung** ($s > 0$) oder **Stauchung** ($s < 0$).



Bemerkungen:

- Der Kommutator $\big[X_{S_0(L)}, X_{\Lambda(L)}\big]$ verschwindet genau dann wenn $S_0(L)$ und $\Lambda(L)$ kommutieren, d.h. wenn $L \in End(V)$ normal ist. In diesem Fall gilt also

$$\Phi_t^{X_L} = \Phi_t^{X_{S_0(L)}} \circ \Phi_t^{X_{\Lambda(L)}} \circ \Phi_t^{X_{\frac{1}{n}Tr(L)id}}$$

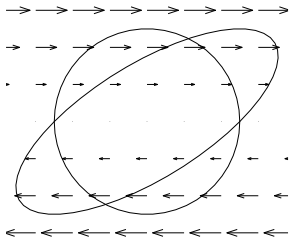
  Im allg. hat man $Exp\big(tS_0(L) + t\Lambda(L)\big) = Exp\big(tS_0(L)\big) \cdot Exp\big(\Lambda(L)\big) - \frac{t^2}{2}\big[S_0(L), \Lambda(L)\big] + o(t^2)$.

- Für **indefinites** g können die Normalformen von $L \in S_0(V,g) \cup \Lambda(V,g)$ nicht-triviale Jordan-Blöcke aufweisen. Wir zeigen die Unterschiede zum Riemannschen Fall am Beispiel des Lorentz-Skalarprodukt $g_{Lor} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ auf $\mathbb{R}^2$, d.h. es gilt $g_{Lor}(e_i, e_i) = 0$ $(i = 1,2)$ und $g_{Lor}(e_1, e_2) = 1$. In einer solchen Basis berechnet man leicht

$$L \in \Lambda(\mathbb{R}^2, g_{Lor}) \;\Leftrightarrow\; L = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{smallmatrix}\right), \qquad L \in S_0(\mathbb{R}^2, g_{Lor}) \;\Leftrightarrow\; L = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

- Die *Lorentz-Drehungen* (**"boosts"**) $Exp(\Lambda(\mathbb{R}^2, g_{Lor})) = SO(\mathbb{R}^2, g_{Lor})$ entsprechen den Scherungen in der Euklidischen Ebene mit einer Basis aus *lichtartigen* Eigenvektoren.

- Bei den *Lorentz-Scherungen* $Exp(S_0(\mathbb{R}^2, g_{Lor})) \subset SL(\mathbb{R}^2, g_{Lor})$ sind zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn $\lambda_1 = -\lambda_2$, entspricht L einer Euklidischen Drehung. Andernfalls ist L in $SO(\mathbb{R}^2, g_{Lor})$ konjugiert zu der Jordansche Normalform $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Diese Transformation ist im Euklidischen in erster Ordnung die Komposition einer Drehung mit einer Scherung:



3 Metrische Linearisierung eines Vektorfeldes

Als letzten Schritt möchten wir nun das lokale Verhalten eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$ auf einer beliebigen (pseudo)-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) beschreiben. Um den obigen Formalismus anwenden zu können, muss man X zunächst linearisieren. Für ein Vektorfeld $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf dem $\mathbb{R}^n$ geschieht dies durch die **Richtungsableitung** $X^{lin}(v) := D_p X(v)$, $v, p \in \mathbb{R}^n$. Die naheliegende Verallgemeinerung ist nun

$$X^{\nabla}(v) := \nabla_v X(p), \quad v \in T_pM$$

wobei ∇ den Levi-Civita Zusammenhang der Metrik g bezeichne. Den Endomorphismus $\nabla X \in End(T_pM)$, der dem linearen Vektorfeld $X^{\nabla} \in \mathfrak{X}(T_pM)$ entspricht, können wir nun wie oben in seine $SO(T_pM, g)$-irreduziblen Teile zerlegen: $\nabla X = S_0(\nabla X) + \Lambda(\nabla X) + \frac{1}{n} Tr(\nabla X) \cdot id$. Um auf bekannte Ausdrücke zu kommen dualisieren wir noch und erhalten

$$\begin{aligned}
Tr(\nabla X) \cdot id^{\sharp}(Y, Z) &= div(X) \cdot g(Y, Z) \\
2 \cdot S_0(\nabla X)^{\sharp}(Y, Z) &= g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) - \frac{2}{n} Tr(\nabla X) g(Y, Z) \\
&= (L_X g)(Y, Z) - \frac{2}{n} div(X) g(Y, Z) \\
2 \cdot \Lambda(\nabla X)^{\sharp}(Y, Z) &= g(\nabla_Y X, Z) - g(\nabla_Z X, Y) \\
&= rot(X)(Y, Z)
\end{aligned}$$

In Worten zusammengefasst:

- Die **Divergenz** $\boldsymbol{div(X)_p}$ misst die infinitesimale Volumenänderung des Flusses Φ^X in p. Für $div(X) > 0$ spricht man von einer **Quelle**, für $div(X) < 0$ von einer **Senke**. Beachte die Formel $L_X\, dM = div(X)\, dM$.

- Die **Lie-Ableitung** $\boldsymbol{(L_X g)_p}$ misst - modulo Divergenz - die infinitesimale Scherung des Flusses Φ^X in p. Aus der Formel $L_X g = \frac{2}{n} div(X)$ für konforme Vektorfelder folgt, dass diese *keinen* Scherungsanteil besitzen.

- Die **Rotation** $\boldsymbol{rot(X)_p}$ misst die infinitesimale Drehbewegung (Twist) des Flusses Φ^X in p. Z.B. verschwindet die Rotation jedes Gradientenfeldes $grad(f) \in \mathfrak{X}(M)$ einer glatten Funktion $f \in C^{\infty}(M)$, denn:

$$\begin{aligned} rot\big(grad(f)\big)(Y,Z) &= g\big(\nabla_Y grad(f), Z\big) - g\big(\nabla_Z grad(f), Y\big) \\ &= Yg\big(grad(f), Z\big) - g\big(grad(f), \nabla_Y Z\big) - Zg\big(grad(f), Y\big) + g\big(grad(f), \nabla_Z Y\big) \\ &= Y\big(Z(f)\big) - Z\big(Y(f)\big) - \underbrace{\big(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y\big)}_{=[Y,Z]}(f) = 0 \end{aligned}$$

4 Linearisierung eines Vektorfeldes mit Nullstelle

Wir wollen uns nun noch überlegen, inwieweit die Linearisierung $X^\nabla \in \mathfrak{X}(T_pM)$ eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$ von der gewählten pseudo-Riemannschen Metrik g auf M abhängt. Sei $\widetilde{g}$ eine weitere Metrik mit induzierten Levi-Civita-Zusammenhang $\widetilde{\nabla}$. Dann existiert bekanntlich eine bilineare Abbildung $A : T_pM \times T_pM \to T_pM$ mit

$$\widetilde{\nabla}_v X(p) = \nabla_v X(p) + A\big(v, X(p)\big) \qquad \Rightarrow \qquad X^{\widetilde{\nabla}}(v) = X^\nabla(v) + A\big(v, X(p)\big)$$

Die Linearisierung ist also genau dann unabhängig von der Metrik g wenn $X(p) = 0$. Dies kann man auch direkt an der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs ablesen, denn für $X(p) = 0$ stimmt die Lie-Ableitung mit der durch eine *beliebige* Metrik induzierten kovarianten Ableitung überein:

$$\nabla_V X(p) = [V, X](p) - \nabla_X V(p) = -L_V X(p), \quad \forall\, V \in \mathfrak{X}(M) \qquad (**)$$

Wie lässt sich diese Invarinanz bei Änderung der Metrik geometrisch deuten?

Die Nullstelle p eines Vektorfeldes X ist Fixpunkt des Flusses Φ_t^X von X und damit ist dessen Linearisierung $\big(d\Phi_t^X\big)_p \in End(T_pM)$ ein Familie von Isomorphismen in T_pM. Dies definiert nun wiederum einen Fluss auf T_pM, dessen zugehöriges Vektorfeld auf T_pM wir ebenfalls als eine Linearisierung von X auffassen können:

$$X^{lin}(v) := \frac{d}{dt}\big(d\Phi_t^X\big)_p\Big|_{t=0}(v), \quad v \in T_pM$$

Es sei noch einmal betont, dass diese Linearisierung *ohne* eine zusätzliche Struktur auf der Mannigflatigkeit definiert werden kann. Sei nämlich $V \in \mathfrak{X}(M)$ ein beliebiges Vektorfeld mit $V(p) = v$, so erhält man nach einer bekannten Formel für die Lie-Ableitung

$$L_V X(p) = -L_X V(p) = -\frac{d}{dt}\big(d\Phi_{-t}^X\big)(V)_p\Big|_{t=0} = -X^{lin}(v)$$

Insbesondere zeigt dann Gleichung $(**)$, dass in einer Nullstelle von X beide Linearisierungen übereinstimmen:

$$\boxed{X^\nabla = X^{lin}}$$

Ist hingegen $X(p) \neq 0$, so ist die Linearisierung des Flusses $\big(d\Phi_t^X\big)_p : T_pM \to T_{d\Phi_t^X(p)}M$ von X eine lineare Abbilding zwischen verschiedenen Tangentialräumen, die ohne zusäztliche Information nicht kanonisch miteinander identifiziert werden können. Daher haben wir im vorherigen Abschnitt einen Zusammenhang ∇ zuhilfe genommen, der einen konstanten, d.h. in p parallelen Teil des Vektorfeldes auszeichnet und beim Linearisieren ignoriert - genauso wie im $\mathbb{R}^n$. Sei nämlich $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld mit $\widetilde{X}(p) = X(p)$ und $\nabla\widetilde{X}(p) = 0$, so gilt

$$X^\nabla(v) = \nabla_v X(p) = \nabla_v(X - \widetilde{X})(p) = \big(X - \widetilde{X}\big)^\nabla(v) = \big(X - \widetilde{X}\big)^{lin}(v)$$

Bemerkungen:

- Der Fluss von X^{lin} ist per Definition explizit gegeben durch $\Phi_t^{X^{lin}} = \big(d\Phi_t^X\big)_p$. Ist also z.B. X ein Killing-Vektorfeld bzw. konformes Vektorfeld, so überträgt sich diese Eigenschaft auf X^{lin}, da die entsprechenden Flüsse Isometrien bzw. konforme Abbildungen sind.

- Für eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$ ist die **Hessische** von f definiert als die folgende Bilinearform auf T_pM:

$$Hess^\nabla(f)(X,Y) := \big(\nabla_X df\big)(Y) = g\big(\nabla_X grad(f), Y\big) = \big(\nabla \operatorname{grad}(f)\big)^\sharp(X,Y)$$

  Da die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet, ist $Hess^\nabla(f)$ symmetrisch. Ferner ist $Hess^\nabla(f)$ in einem *kritischen Punkten* p von f (d.h. $grad(f)_p = 0$) unabhängig von ∇, wie oben gezeigt. Genauer gilt

$$Hess^\nabla(f)(X,Y) = X\big(Y(f)\big) - g\big(grad(f), \nabla_X Y\big) \qquad (***)$$

  d.h. ist $\gamma(t)$ eine Kurve in M und $\gamma(0)$ ein kritischer Punkt von f, so ergibt sich

$$Hess^\nabla(f)\big(\gamma'(0), \gamma'(0)\big) = (f \circ \gamma)''(0)$$

  Im allgemeinen gilt diese Gleichung nur für Geodäten, da dann der 2. Term in $(***)$ verschwindet aufgrund von $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$.

- Sei (M,g) eine pseudo-Riemannschen Manngifaltigkeit und $U \subset M$ eine Normalenumgebung von $q \in M$, dann induziert $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf $exp_q{}^{-1}(U) \subset T_qM$ durch

$$X^{exp} := exp_q{}^* X$$

  Die Komponenten von X^{exp} in einer ONB $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von T_qM sind also gerade die Komponenten von X bzgl. der kanonischen Basisvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_i} := (exp_q)_*\, e_i$, d.h.

$$X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad X^{exp}(v) = \sum \xi^i(exp_q(v))e_i$$

  Das Vektorfeld X^{exp} kann nun durch die gewöhnlich Richtungsableitung D in T_qM linearisiert werden. Andererseits gilt $\nabla_v X(q) = \sum v(\xi^i)e_i$, da Normalkoordianten von erster Ordnung Euklidissch sind in q, d.h.

$$\boxed{DX^{exp}(v) = X^\nabla(v)}$$

  Ist X insbesondere ein Killing-Vektorfeld mit $X(q) = 0$, so besteht sein Fluss aus Isommetrien und es gilt $\Phi_t^X \circ exp_q = exp_q \circ d\Phi_t^X$, da $\Phi_t^X(q) = q$. Durch Ableiten ergibt sich daraus

$$X \text{ Killing-Vektorfeld} \qquad \Rightarrow \qquad X^{exp} = X^{lin} = X^\nabla$$