RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Sommersemester 2002
2002-04-29
Blatt 2

Übungen zur Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“

Aufgabe 5: *(Bernoulli-Differentialgleichung)*

Führen Sie folgende Differentialgleichungen durch eine geeignete Substitution auf lineare Differentialgleichungen zurück und lösen Sie diese (mit Beschreibung der Definitionsbereiche):

a) $\dot{y} + t\,y - t^3\,y^2 = 0$ b) $\dot{y} + \frac{1}{2}\,t\,y + \frac{t}{2y} = 0, \qquad (y \neq 0).$

Aufgabe 6: *(Euler-Differentialgleichung)* Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$t^2\,\ddot{y} - 2t\,\dot{y} + 2y = (\ln t)^2, \qquad (t > 0).$$

Aufgabe 7: *(Exakte DGl, integrierender Faktor)* Lösen Sie die Differentialgleichung

$$t\,y^2 - y^3 + (1 - t\,y^2)\,\dot{y} = 0$$

mit Hilfe eines integrierenden Faktors. *Hinweis:* Der Faktor hängt nur von einer der beiden Variablen t und y ab.

Aufgabe 8: *(Riccati-DGl)*

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Weiter seien $g, h, k\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die *Riccatische Differentialgleichung*

$$\dot{x} + g(t)\,x + h(t)\,x^2 = k(t) \tag{1}$$

ist im allgemeinen nicht geschlossen lösbar. Ist jedoch eine Lösung $u(t)$ bekannt, so kann die allgemeine Lösung im Prinzip berechnet werden. Zeigen Sie: wenn $x(t)$ eine weitere Lösung von (1) ist, so muss die Differenz $y(t) := x(t) - u(t)$ die Differentialgleichung

$$\dot{y} + \big(g(t) + 2u(t)\,h(t)\big)\,y + h(t)\,y^2 = 0 \tag{2}$$

erfüllen. Diese Differentialgleichung ist lösbar! Wie sieht die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) aus?

b) Geben Sie die allgemeine Lösung von

$$\dot{x} - \frac{1}{t}\,x + e^{-t}\,x^2 = \frac{2t-1}{t}e^t, \qquad t \in (0, \infty)$$

an. (Hinweis: $u(t) = e^t$ ist eine Lösung.)

Aufgabe 9: Gegeben sei die lineare Differentialgleichung zweiter Ordung

$$\ddot{x} + a_1(t)\,\dot{x} + a_0(t)\,x = 0.$$

Weiter seien $x_1, x_2\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Lösungen dieser Gleichung. Die zugehörige Wronski-Determinante $w\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$w := \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Wronski-Determinante die Differentialgleichung

$$\dot{w} + a_1(t)\,w = 0$$

erfüllt. Was können Sie über das Vorzeichen der Wronski-Determinante sagen?

Aufgabe 10: Die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}(t;\mathbf{y})$ soll durch eine Transformation $t = \varphi(s)$, $\mathbf{y} = \Phi(s,\mathbf{x})$ in eine Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{f}(s;\mathbf{x})$ überführt werden. Dabei seien $s, t \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, das Vektorfeld $\mathbf{g}$ sei stetig, und

$$(s,\mathbf{x}) \mapsto \big(\varphi(s),\ \Phi(s,\mathbf{x})\big)$$

sei ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ (oder entsprechende lokale Voraussetzungen). Zeigen Sie, dass das transformierte Vektorfeld $\mathbf{f}$ durch

$$\mathbf{f}(s,\mathbf{x}) = \big(D_{\mathbf{x}}\Phi(s,x)\big)^{-1}\Big(\dot{\varphi}(s)\,\mathbf{g}\big(\varphi(s),\ \Phi(s,\mathbf{x})\big) - D_s\Phi(s,\mathbf{x})\Big) \tag{3}$$

gegeben ist, wobei $D_s\Phi$ den Spaltenvektor der partiellen Ableitungen von Φ nach s und $D_{\mathbf{x}}\Phi$ die $n \times n$-Matrix der Ableitungen nach x_i bezeichne.

Präsenzaufgabe A: Prüfen Sie, ob die folgende Differentialgleichung exakt ist, und bestimmen Sie alle Lösungen:

$$\frac{y}{t^2} + \big(2y - \frac{1}{t}\big)\,\dot{y} = 0, \qquad (t \neq 0).$$

Präsenzaufgabe B: Bestimmen Sie alle Lösungen der Bernoulli-Differentialgleichung

$$\dot{y} + y^3 = 0.$$

Achten Sie bei jeder Umformung und Substitution darauf, keine Lösung zu vergessen und auf den Definitionsbereich!

Präsenzaufgabe C: Betrachten Sie den Spezialfall der Transformation aus Aufgabe 10 mit

$$t = \varphi(s) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\,.$$

Welche vereinfachte Transformationsformel für das Vektorfeld $\mathbf{f}$ ergibt sich aus Gleichung (3)? Beweisen Sie diese Transformationsformel.

Präsenzaufgabe D: Betrachten Sie den Spezialfall $n = 1$ in der Transformation aus Aufgabe 10, d. h. die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = g(t,y)$ soll mittels der Transformation $t = \varphi(s), y = \Phi(s,x)$ in die DGl $\dot{x}(s) = f(s,x)$ überführt werden. Überprüfen Sie, dass (3) in

$$f(s,x) = \frac{1}{\partial_x\Phi(s,x)}\Big(\dot{\varphi}(s)\,g\big(\varphi(s),\ \Phi(s,x)\big) - \partial_s\Phi(s,x)\Big)$$

übergeht, und beweisen Sie diese Gleichung. Hierbei bezeichnen ∂_x und ∂_s die partiellen Ableitungen nach x und s.

Weitere Informationen unter `http://www.iram.rwth-aachen.de/~enss/GewDgl02.html`