RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Sommersemester 2002
2002-05-13
Blatt 3

Übungen zur Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“

Aufgabe 11:

Sei $h\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Transformieren Sie die Differentialgleichungen

$$\text{a)}\quad \dot{\mathbf{y}} = h(|\mathbf{y}|)\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \qquad \text{bzw.} \qquad \text{b)}\quad \dot{\mathbf{y}} = h(|\mathbf{y}|)\frac{1}{|\mathbf{y}|}\begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

in Polarkoordinaten. Geben Sie speziell für $h(r) = r^{-2}$ die Lösungen der beiden Differentialgleichungen zum Anfangswert $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ an.

Aufgabe 12: Berechnen Sie mit Hilfe der Jordanschen Normalform die Matrix e^{tA} mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13:

a) Bestimmen Sie die Lösungen der beiden Anfangswertprobleme $\dot{\mathbf{x}} = A\,\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\dot{\mathbf{y}}_\delta = A_\delta \mathbf{y}_\delta$, $\mathbf{y}_\delta(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_\delta := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2+\delta \end{pmatrix}, \qquad \delta > 0.$$

Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen den beiden (richtig gewählten) Eigenvektoren von A_δ für $\delta \to 0$ beliebig klein wird. Beweisen Sie ferner folgende Abschätzung für den „relativen Fehler“:

$$\frac{|\mathbf{y}_\delta(t) - \mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t)|} \leq \delta |t| \mathrm{e}^{\delta|t|} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } \delta > 0.$$

b) Lösen Sie ebenso das Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{z}}_\gamma = B_\gamma\,\mathbf{z}_\gamma$, $\mathbf{z}_\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit

$$B_\gamma := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \gamma & 2 \end{pmatrix}$$

für $\gamma > 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{z}_\gamma(t)$ für $\gamma \to 0$ lokal gleichmäßig gegen $\mathbf{x}(t)$ konvergiert. Was ändert sich für $\gamma < 0$ (keine Rechnung, nur qualitativ)?

(bitte wenden)

Aufgabe 14:

a) Bestimmen Sie für alle $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ das Existenzintervall der maximalen Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = 1 + x^2, \qquad x(t_0) = x_0.$$

Welches (minimale) Existenzintervall wird zum Vergleich für $x_0 = t_0 = 0$ durch den Satz von Picard–Lindelöf (vgl. Aufgabe C) vorhergesagt? Betrachten Sie dazu $x \in [-b, b]$, bestimmen Sie die Lipschitzkonstante in diesem Intervall und wählen Sie $b > 0$ optimal.

b) Sei $f(t) := 2t^{-3}$ für $t \neq 0$ und $f(0) := 0$. Zeigen Sie, dass die (lineare!) Differentialgleichung $\dot{x} = f(t)x$ unendlich viele verschiedene Lösungen hat, die alle auf ganz $\mathbb{R}$ existieren und $x(0) = 0$ erfüllen, und geben Sie diese an.

Präsenzaufgabe A: Bestimmen Sie die Jordannormalform (inklusive einer Transformationsmatrix) von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$.

Präsenzaufgabe B: Sei $f_\delta(t) = \mathrm{e}^{(2+\delta)t}$. Bestimmen Sie eine Linearkombination mit der Eigenschaft $a_\delta f_\delta(t) + b_\delta f_0(t) \to t\mathrm{e}^{2t}$ für $\delta \to 0$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ (gleichmäßig auf Kompakta).

Präsenzaufgabe C: Betrachten Sie die Picard-Iteration $(Tx)(t) := \int_0^t f(s, x(s))\, ds$ (für die spezielle Anfangsbedingung $x(0) = 0$). Sei f stetig mit $|f(t,x)| \leq M$ für $|t| \leq a$ und $|x| \leq b$, und sei L eine Lipschitzkonstante (bezüglich x) in diesem Bereich. Sei ferner $\alpha := \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{2L}\}$. Zeigen Sie: T ist eine kontrahierende Selbstabbildung der Menge der stetigen Abbildungen x von $[-\alpha, \alpha]$ nach $[-b, b]$ (bezüglich der Supremumsnorm).