RWTH Aachen Sommersemester 2002
Institut für Reine und Angewandte Mathematik 2002-05-27
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post **Blatt 4**

Übungen zur Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“

Aufgabe 15:

a) Sei $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich des zweiten Argumentes stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t;\mathbf{x})\cdot \sin|\mathbf{x}|, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x < 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0 < 0$ für alle $t \geq 0$ existiert und dass $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ gilt.

Aufgabe 16: Man betrachte in $\mathbb{R}^2$ das System

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= f(x)\end{aligned}\right\}(*) \quad \text{sowie die Funktion} \quad H(x,y) := \frac{y^2}{2} + U(x) \quad \text{mit} \quad U(x) := -\int_0^x f(x')\,dx',$$

wobei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

(i) Zeigen Sie, dass $H\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ längs Lösungen von $(*)$ konstant ist. (ii) Berechnen Sie $\operatorname{grad} H(x,y)$ und zeigen Sie, dass dieser Vektor senkrecht auf dem Vektor $(y, f(x))$ steht.

(iii) Wie hängen Niveaumengen von H (d. h. die Mengen $H^{-1}(c) = \{(x,y) | H(x,y) = c\}$) mit den Lösungen von $(*)$ zusammen? (iv) Wie hängt c mit den Anfangswerten $(x_0, y_0) = (x(0), y(0))$ zusammen?

(v) Wie kann man U die mögliche Existenz stationärer Punkte ansehen? (vi) Zeigen Sie, dass für alle stationären Punkte $y = 0$ gilt. (vii) Zeigen Sie, dass alle Lösungskurven die x-Achse senkrecht schneiden. (viii) Sei $(x_0, 0)$ ein stationärer Punkt. Zeigen Sie, dass alle Lösungskurven mit $x(t_0) = x_0$ dort eine Tangente parallel zur x-Achse haben.

Aufgabe 17: *Varianten der Gronwallschen Ungleichung*

Seien $u, v, C\colon [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ Funktionen mit nicht-negativen reellen Werten; u und v seien stetig. Es gelte die Integralungleichung

$$v(t) \leq C(t) + \int_a^t u(s)v(s)\,ds \qquad \text{für alle } t \in [a,b].$$

a) Ist C monoton wachsend auf $[a,b]$, so folgt

$$v(t) \leq C(t)\,\exp\left(\int_a^t u(s)\,ds\right) \qquad \text{für alle } t \in [a,b].$$

(bitte wenden)

b) Ist C stetig auf $[a,b]$, so folgt

$$v(t) \leq C(t) + \int_a^t C(s)u(s)\,\exp\left(\int_s^t u(r)\,dr\right) ds \qquad \text{für alle } t \in [a,b].$$

Hinweis: Sei $\gamma(t) := \exp(-\int_a^t u(s)\,ds)$. *Man finde eine Abschätzung für den Ausdruck* $\frac{d}{dt}(\gamma(t)\int_a^t u(s)v(s)\,ds)$.

Aufgabe 18:

a) Sei $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und lokal gleichmäßig Lipschitz-stetig im zweiten Argument. Es gebe Konstanten $c > 0$ und $\alpha > 0$, so dass

$$f(t;x) \geq c(1+|x|^{1+\alpha}) \qquad \text{für alle } t,x \in \mathbb{R}$$

gilt. Zeigen Sie, dass dann für alle $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(t;x), \qquad x(t_0) = x_0$$

nicht global existiert.

Hinweis: Man zeige zuerst, dass es zu beliebigem $x_0 \in \mathbb{R}$ *ein* $t_1 \geq t_0$ *mit* $x(t_1) > 1$ *gibt. Dann folgere man aus* $f(t;\,x(t)) \geq c\,[x(t)]^{1+\alpha}$ *für alle* $t \geq t_1$ *eine Ungleichung für die Lösung des Anfangswertproblems.*

b) Sei $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^\nu\backslash\{\mathbf{0}\}) \longrightarrow \mathbb{R}^\nu$ stetig und lokal gleichmäßig Lipschitz–stetig im zweiten Argument. Es gebe Konstanten $c > 0$ und $\alpha > 0$, so dass

$$\mathbf{f}(t;\mathbf{x})\cdot\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \geq c(1+|\mathbf{x}|^{1+\alpha}) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu\backslash\{\mathbf{0}\}$$

gilt. Zeigen Sie, dass dann für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^\nu\backslash\{\mathbf{0}\}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t;\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

nicht global existiert.

Präsenzaufgabe A: Berechnen Sie H auf Aufgabe 16 für $f(x) = -x$ und skizzieren Sie die Niveaumengen. Wo haben die Niveaulinien horizontale bzw. vertikale Tangenten? Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $(*)$.

Präsenzaufgabe B: Lösen Sie die Integralgleichung

$$w(t) = C(t) + \int_a^t u(s)w(s)\,ds \qquad \text{für alle } t \in [a,b],$$

wobei $C\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ als stetig und im Innern als differenzierbar angenommen werden darf. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Variante der Gronwallschen Ungleichung aus Aufgabe 17 b). Zeigen Sie, dass die Variante der Aufgabe 17 a) aus b) folgt, wenn man zusätzlich annimmt, dass C monoton wachsend ist.

Präsenzaufgabe C: Seien $\alpha, c > 0$. Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = c\,x^{1+\alpha}$ mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0 > 0$ und bestimmen Sie das maximale Existenzintervall.