RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Sommersemester 2002
2002-06-17
Blatt 6

Übungen zur Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“

Aufgabe 23:

a) Skizzieren Sie das Phasenportrait für $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Finden Sie eine parameterfreie Darstellung der Lösungen von $\dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}$ mit $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (d. h. eine Beziehung zwischen den Komponenten x_1 und x_2 der Lösung $\mathbf{x}$). Welche Kurven ergeben sich speziell für $\beta = \alpha$, $\beta = 3\alpha$ bzw. $\beta = -\alpha$? Skizzieren Sie die Phasenraumbilder für diese Fälle und geben Sie auch jeweils die Orientierung der Kurven an. (Fallunterscheidung!)

c) Bestimmen Sie eine parameterfreie Darstellung in Polarkoordinaten der Lösungen von $\dot{\mathbf{x}} = C\mathbf{x}$ mit $C = \begin{pmatrix} \kappa & \omega \\ -\omega & \kappa \end{pmatrix}$, $\kappa, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$. Zeichnen Sie auch hier die Phasenraumbilder mit Orientierungen.

Aufgabe 24: Skizzieren Sie die Phasenportraits von

a) $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}$ mit $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 25: Sei $A := \begin{pmatrix} \kappa & \omega & 0 \\ -\omega & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\kappa, \omega, \lambda \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$.

a) Seien außerdem $\kappa, \lambda < 0$ mit $\lambda = 2\kappa$. Zeigen Sie, dass die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{\mathrm{T}} \quad \text{mit} \quad (\xi_1, \xi_2) \neq 0 \quad \text{und} \quad \xi_3 \neq 0$$

die Gleichung

$$x_3(t) = \frac{\xi_3}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \big(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 \big)$$

erfüllt. Zeigen Sie weiter, dass die Lösung eine auf den Nullpunkt zulaufende Spirale auf einem Paraboloid beschreibt.

b) Wie sehen die orientierten Lösungen für $\kappa < 0$, $\lambda = -\kappa$ aus?

c) Wie sehen die orientierten Lösungen für $\kappa > 0$, $\lambda = -3\kappa$ aus?

(bitte wenden)

Aufgabe 26: Seien $g, h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $g(x) \geq 0$, $h(0) = 0$, $h(x) > 0$ für $x > 0$ sowie $h(x) < 0$ für $x < 0$. Zeigen Sie mit Hilfe einer Lyapunov-Funktion, dass das zur DGl

$$\ddot{x} + g(x)\,\dot{x} + h(x) = 0$$

gehörende System erster Ordnung im Nullpunkt eine stabile Gleichgewichtslage besitzt. *Hinweis: Für $g = 0$ ist das zugehörige System ein Hamiltonsystem.*

Präsenzaufgabe A:

Lösen Sie die DGl aus Aufgabe 23 b) für den Fall $\alpha = 1$ und $\beta = 3$. Finden Sie eine parameterfreie Darstellung dieser Lösungen. Lösen Sie die DGl aus Aufgabe 23 c) für den Fall $\kappa = 1$ und $\omega = 1$. Finden Sie eine parameterfreie Darstellung dieser Lösungen (in Polarkoordinaten).

Präsenzaufgabe B:

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen A und B aus Aufgabe 24. Finden Sie eine reelle Basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ des $\mathbb{R}^2$ mit $B\,\mathbf{b}_1 = -\mathbf{b}_2$ und $B\,\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1$. Wie sieht die Matrix B in dieser Basis aus?

Präsenzaufgabe C:

Lösen Sie das in Aufgabe 25 angegebene Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{\mathrm{T}}$ (indem Sie z. B. die Matrix e^{tA} berechnen oder das DGl-System durch Entkoppeln lösen).

Präsenzaufgabe D: (zu Aufgabe 26)

Bestimmen Sie das zur Differentialgleichung

$$\ddot{x} + g\,\dot{x} + x = 0$$

gehörende DGl-System erster Ordnung, $g \geq 0$. Geben Sie eine Hamilton-Funktion H für den Fall $g = 0$ an. Zeigen Sie schließlich, dass H eine Lyapunov-Funktion für das DGl-System ist.

Weitere Informationen unter `http://www.iram.rwth-aachen.de/~enss/GewDgl02.html`