**RWTH Aachen** Sommersemester 2002
Institut für Reine und Angewandte Mathematik 2002-06-24
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post **Blatt 7**

# Übungen zur Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“

**Aufgabe 27:** Sei $D \subset \mathbb{R}^\nu$ eine offene Menge mit $\mathbf{0} \in D$. Weiter sei $W \in C^2(D, \mathbb{R})$ mit $W(\mathbf{0}) = 0$, $\nabla W(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und die Hesse-Matrix $\operatorname{Hess} W(\mathbf{0})$ sei positiv definit. Schließlich sei $\kappa > 0$. Zeigen Sie, dass

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \gamma\mathbf{x})^2 + W(\mathbf{x})$$

für ein geschickt gewähltes $\gamma \in \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion für die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ -\nabla W(\mathbf{x}) - \kappa\,\mathbf{p} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} \in D, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^\nu$$

in einer geeigneten Umgebung von $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2\nu}$ ist, die zusätzlich $\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < 0$ für alle $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ erfüllt. *Hinweis: Es gilt* $\mathbf{x} \cdot \nabla W(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{x} \cdot (\operatorname{Hess} W(t\mathbf{x})\mathbf{x})dt$. *(Beweis?)*
*Bemerkung:* Die physikalische Bedeutung dieser Aussage ist, dass Minimalstellen der potentiellen Energie $W(\mathbf{x})$ bei Anwesenheit von linearer Reibung $\kappa\,\mathbf{p}$ (proportional zur Geschwindigkeit) asymptotische Gleichgewichtslagen sind. Für $\gamma = \kappa = 0$ ist $V$ eine Hamilton-Funktion.

**Aufgabe 28:** Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Die *Volterra-Lotka-Gleichungen*

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& (\alpha - \beta y)x \\ \dot{y} &=& (\delta x - \gamma)y \end{array}, \qquad x, y \in (0, \infty)$$

beschreiben den zeitlichen Verlauf eines ökologischen Systems von Raubtieren (deren Anzahl durch $y(t)$ bezeichnet werde) und ihrer Beute (mit $x(t)$ bezeichnet). Finden Sie eine Lyapunovfunktion auf $(0, \infty) \times (0, \infty)$ und zeigen Sie, dass $(\overline{x}, \overline{y}) := (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ eine stabile Gleichgewichtslage ist.
*Hinweis: Betrachten Sie die partielle Differentialgleichung (PDgl)*

$$\dot{V}(x, y) = \nabla V(x, y) \cdot \mathbf{f}(x, y) = 0,$$

*wobei* $\mathbf{f}(x, y)$ *das Vektorfeld zu dem oben angegebenen DGl-Systems ist. Lösen Sie die PDgl mit Hilfe des Separationsansatzes* $V(x, y) = F(x)G(y)$, *indem Sie sie in die Form* $\Phi(x) = \Psi(y) = \text{const}$ *bringen und die so entstehenden gewöhnlichen DGln lösen. Beachten Sie, dass* $V$ *ein Minimum in der Gleichgewichtslage haben soll.*

**Aufgabe 29:** Sei $G \subset \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ die Menge der $\nu \times \nu$-Matrizen mit $\nu$ paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ und $\operatorname{Re}\lambda_k \neq 0$ für alle $k = 1, \ldots, \nu$. Zeigen Sie, dass $G$ offen und dicht in $\mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ ist. ($\mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ trage die von irgendeiner Norm erzeugte Topologie; da alle Normen äquivalent sind, ist die Topologie eindeutig.)
*Hinweis: Für den Beweis der Offenheit nutze man (ohne Beweis) die Tatsache aus, dass die Nullstellen eines Polynoms stetig von seinen Koeffizienten abhängen. Für den Beweis der Dichtheit gehe man wie folgt vor: Sei* $J$ *die reelle Jordan-Normalform von* $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$. *Approximieren Sie* $J$ *durch* $J_\delta := J + \operatorname{diag}\{\delta, 2\delta, \ldots, \nu\delta\}$.

*(bitte wenden)*

**Aufgabe 30:** Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen, ob (bzw. für welche Parameterwerte $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$) sie hyperbolisch sind, und geben Sie gegebenenfalls die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten an. Finden Sie für $A_1$ mit $|\alpha| > 1$ sowie $A_2$ mit $|\beta| < 3$ auch die Matrixdarstellung des Projektors $P$ auf $E^s$. *Hinweis: Eigenwerte und Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren bestimmter Matrizen wurden bereits in Aufgabe 1 und Aufgabe 12 berechnet.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \beta & 9 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 0 & \gamma & 0 \\ -1 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Präsenzaufgabe A:** (zu Aufgabe 28)

a) Führen Sie die Separation für die Lösungen $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ der partiellen Differentialgleichung $\Delta U := U_{xx} + U_{yy} = 0$ durch: Der Laplace-Operator $\Delta$ hat in Polarkoordinaten $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ die Darstellung $\Delta V = V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r^2}V_{\varphi\varphi}$, wobei $V(r, \varphi) = U(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ die transformierte Funktion ist. *Hinweis: Verwenden Sie den Separationsansatz* $V(r, \varphi) = F(r)G(\varphi)$.

b) Zeigen Sie, dass $U := \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ eine invariante Mannigfaltigkeit für das DGl-System aus Aufgabe 28 ist, d. h. dass für Lösungen mit $(x(0), y(0)) \in U$ auch $(x(t), y(t)) \in U$ gilt, solange die Lösung zur Zeit $t$ noch existiert.

**Präsenzaufgabe B:** (zu Aufgabe 29)

Zeigen Sie, dass die Menge $G$ der $2 \times 2$-Matrizen mit verschiedenen Eigenwerten offen und dicht in der Menge $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller $2 \times 2$-Matrizen ist.

**Präsenzaufgabe C:** (zu Aufgabe 30)

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ der Matrix $A_2$ mit $\beta = -1$. Wie sieht die Matrix $A_2$ in der Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ aus? Wie sieht der Projektor auf den ersten bzw. zweiten Eigenvektor in dieser Basis aus? Geben Sie die Projektoren auch in der ursprünglichen Basis an. Geben Sie schließlich die stabile sowie instabile Mannigfaltigkeit $E^s$ bzw. $E^u$ sowie den Projektor auf $E^s$ an.

**Präsenzaufgabe D:** (zu Aufgabe 27)

Seien $c, \kappa > 0$ und $W(x) := \frac{c}{2}x^2$. Zeigen Sie, dass

$$V(x, p) := \frac{1}{2}(p + \gamma x)^2 + W(x)$$

für ein geschickt gewähltes $\gamma \in \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion für die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -cx - \kappa p \end{pmatrix}, \qquad x, p \in \mathbb{R}$$

in einer geeigneten Umgebung von $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ ist, die außerdem $\dot{V}(x, p) < 0$ für $(x, p) \neq (0, 0)$ erfüllt.