RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Wintersemester 2002/03
2002-10-30
Blatt 2

Übungen zur Vorlesung „Dynamische Systeme“

Aufgabe 5: Sei $F\colon X \longrightarrow X$ eine stetige Selbstabbildung eines metrischen Raumes (X, d) und sei $\overline{x} \in \operatorname{Per}_p(F)$ ein anziehender periodischer Punkt. Beweisen Sie, dass der Orbit $\mathcal{O}(\overline{x}) = \{\overline{x}, F(\overline{x}), \dots, F^{p-1}(\overline{x})\}$ von $\overline{x}$ ein Attraktor ist.

Aufgabe 6: Gegeben sei die logistische Abbildung $F_\mu(x) := \mu x(1-x)$ auf $X = [0,1]$ mit $1 < \mu < 3$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = \xi_\mu := 1 - \frac{1}{\mu} \quad \text{für } x \in (0,1) \text{ und } \quad \lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = 0 \quad \text{für } x \in \{0,1\}$$

gilt. *Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $1 < \mu < 2$, $\mu = 2$ sowie $2 < \mu < 3$ getrennt, wobei im letzten Fall $x = \xi_\mu$ sowie $x = \overline{\xi}_\mu := 1 - \xi_\mu$ als „Teilungspunkte“ wichtig sind. Betrachten Sie im Fall $2 < \mu < 3$ die Abbildung F_μ^2 (Maple oder ein vergleichbares Programm kann bei der Skizze nützlich sein). Beachten Sie außerdem, dass die Symmetrie $F(x) = F(1-x)$ die Untersuchung vereinfachen kann.*

Aufgabe 7:
Die klassische *Cantormenge* C wird wie folgt definiert: Sei $C_0 := [0,1]$. Die Menge C_{n+1} erhält man aus C_n, indem jeweils das offene mittlere Drittel der Teilintervalle von C_n entfernt wird. Damit erhält man $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cap [\frac{8}{9}, 1]$ usw. Schließlich setzt man $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.
Zeigen Sie, dass C *abgeschlossen, perfekt* und *vollständig unzusammenhängend* ist. (Eine Menge heißt *perfekt*, wenn sie keine isolierten Punkte enthält. Eine Menge ist *vollständig unzusammenhängend*, falls sie kein nichttriviales Intervall $[a, b]$, $a < b$, enthält.).
Beweisen Sie schließlich, dass C selbstähnlich ist: Die Abbildung $x \mapsto 3^n x - k$ ist eine Bijektion von $C_{k,n} := C \cap [k3^{-n}, (k+1)3^{-n}]$ nach C für $n \in \mathbb{N}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ so gewählt ist, dass $C_{k,n} \neq \emptyset$ gilt. *Hinweis: Denken Sie an die Darstellung im tertiären Zahlensystem!*

Aufgabe 8:
Sei $F\colon X \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung auf dem metrischen Raum (X, d).

i) Zeigen Sie: Wenn (X, F) topologisch transitiv ist (in dem Sinne, dass eine dichte Bahn existiert), dann existiert zu jedem Paar offener (nichtleerer) Teilmengen U, V von X ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$ gilt.

ii) Sei (X, F) ein nichttriviales dynamisches System (d. h. X hat unendlich viele Punkte) mit einer dichten Bahn und x_0 periodisch. Zeigen Sie, dass der Anziehungsbereich $\mathcal{A}(x_0) := \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} d(F^n(x), \mathcal{O}(x_0)) = 0\}$ der periodischen Bahn $\mathcal{O}(x_0)$ keine (nichtleere) offene Menge enthalten kann.

(bitte wenden)

Präsenzaufgabe A:

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $F\colon X \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung. Weiter sei $\overline{x}$ ein p-periodischer Punkt und $\mathcal{O}(\overline{x}) = \{\overline{x}, F(\overline{x}), \ldots, F^{p-1}(\overline{x})\}$ der zugehörige Orbit. Zeigen Sie, dass es zu jedem $x_0 \in \mathcal{O}(\overline{x})$ und jedem $k \in \mathbb{N}$ Zahlen $m, r \in \{0, \ldots, p-1\}$ und $\ell \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $F^m(x_0) = \overline{x}$ und $F^k(x_0) = (F^r \circ F^{\ell p} \circ F^m)(x_0)$ gilt.

Präsenzaufgabe B:

i) Gegeben sei die logistische Abbildung $F_\mu(x) := \mu x(1-x)$ auf $X = [0,1]$ mit $1 \leq \mu < 3$.

   (a) Zeigen Sie im Fall $\mu = 1$, dass $\lim_{n\to\infty} F_1^n(x) = 0$ für alle $x \in X$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass $\xi_\mu = 1 - 1/\mu$ ein anziehender Fixpunkt für $1 < \mu < 3$ ist. *Hinweis: Mittelwertsatz!*

   (c) Skizzieren Sie den Graphen von F_μ^2 für $2 < \mu < 3$.

ii) Sei $F\colon X \longrightarrow X$ stetig und $F(\overline{x}) = \overline{x}$, und für $x \in X$ gelte $\lim_{k\to\infty} F^{2k}(x) = \overline{x}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = \overline{x}$ gilt.

Präsenzaufgabe C: Sei $F\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Zeltabbildung $F(x) := 3x$ für $0 \leq x \leq 1/2$ bzw. $F(x) := 3 - 3x$ für $1/2 < x \leq 1$. Weiter sei

$$\Lambda_n := \{x \in [0,1] \mid F^n(x) \in [0,1]\} \quad \text{und} \quad \Lambda := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n.$$

Veranschaulichen Sie sich die Konstruktion von Λ_n und Λ durch eine Skizze. Verwenden Sie die Darstellung von $x \in [0,1]$ im tertiären Zahlensystem ($x = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i 3^{-i}$, $x_i \in \{0,1,2\}$), und überlegen Sie, wann $x \in \Lambda_n$ bzw. $x \in \Lambda$ gilt.

The Red Queen shook her head. "You may call it 'nonsense' if you like," she said, "but I've heard nonsense, compared with which that would be as sensible as a dictionary!"

(aus „Through the looking glass" von Lewis Carroll)