RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Wintersemester 2002/03
2002-11-06
Blatt 3

Übungen zur Vorlesung „Dynamische Systeme“

Aufgabe 9:

a) Für $c \in \mathbb{C}$ sei das dynamische System $(f_c, \mathbb{C})$ mit $f_c(z) := z^2 + c$ gegeben. Bestimmen Sie die Fixpunkte und die 2-periodischen Punkte von f_c in Abhängigkeit vom Parameter c. Skizzieren Sie die Bereiche der Parameterebene, für die ein Fixpunkt oder ein 2-periodischer Punkt von f_c attraktiv ist. *Hinweis:* $f_c^2(z) - z$ *ist durch* $f_c(z) - z$ *teilbar. Ein* p*-periodischer Punkt* z_0 *ist anziehend, falls* $|(f_c^p)'(z_0)| < 1$ *gilt. Ferner ist* $(f_c^2)'(z) = f_c'(f_c(z)) \cdot f_c'(z)$.

b) Betrachten Sie die logistische Abbildung $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ mit $\mu \geq 1$ für $x \in X := \mathbb{R}$. Mittels der affinen Abbildung $z = \Phi_\mu(x) = \mu(1/2 - x)$ erhält man die zu F_μ topologisch konjugierte Abbildung $f(z)$ gemäß $f = \Phi_\mu \circ F_\mu \circ \Phi_\mu^{-1}$. Bestimmen Sie c in Abhängigkeit von μ so, dass $f(z) = z^2 + c$ gilt, und übertragen Sie die Ergebnisse von Teil a) auf die logistische Abbildung (auf $\mathbb{R}$).

Aufgabe 10: Sei $T\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $\theta \mapsto 2\theta$ die Abbildung der Winkelverdoppelung auf dem Einheitskreis. Zeigen Sie (auf möglichst elementare Weise) die Dichtheit von $\operatorname{Per} T$ in $\mathbb{S}^1$, die empfindliche Abhängigkeit vom Startwert und die Existenz eines dichten Orbits.

Aufgabe 11: Seien (F_j, X_j), $j = 1, 2$ zwei (diskrete) dynamische Systeme und $\Phi\colon X_1 \longrightarrow X_2$ eine *surjektive* stetige Abbildung, die $\Phi \circ F_1 = F_2 \circ \Phi$ erfüllt. Welche der Eigenschaften aus Präsenzaufgabe B gelten für (F_2, X_2), wenn sie für (F_1, X_1) gelten?

Aufgabe 12: Sei $F\colon I \longrightarrow I$ eine stetige und stückweise differenzierbare Abbildung auf einem Intervall I. Der *Lyapunov-Exponent* λ (Ляпунов) ist definiert durch

$$\lambda := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |F'(F^i(x_0))|,$$

falls dieser Grenzwert für $x_0 \in I$ existiert.

a) Berechnen Sie $\lambda = \lambda(x_0)$ für einen p-periodischen Punkt x_0.

b) Sei x_0 ein p-periodischer *anziehender* Punkt. Welches Vorzeichen hat $\lambda = \lambda(x_0)$?

c) Berechnen Sie λ für die Zeltabbildung F_r gegeben durch

$$F_r(x) := \begin{cases} rx, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ r(1-x), & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

für $0 \leq r \leq 2$ und $x_0 \in I := [0,1]$, so dass $F'(F^i(x_0))$ für alle $i \in \mathbb{N}$ definiert ist.

(bitte wenden)

Präsenzaufgabe A: Sei $F\colon I \longrightarrow I$ eine differenzierbare Abbildung auf einem offenen Intervall I (oder auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$). Berechnen Sie die Ableitung der k-ten Iterierten F^k an der Stelle z für die folgenden Fälle:

a) z ist ein Fixpunkt.
b) z ist ein k-periodischer Punkt.

Präsenzaufgabe B: Seien (F_j, X_j), $j = 1, 2$ zwei (diskrete) dynamische Systeme und $\Phi\colon X_1 \longrightarrow X_2$ eine Homöomorphismus, der $\Phi \circ F_1 = F_2 \circ \Phi$ erfüllt. Welche der folgenden Eigenschaften von (F_1, X_1) gelten unter der topologischer Konjugation mit Φ auch in (F_2, X_2)?

a) $\overline{x}_1$ ist p-periodischer Punkt.

b) $\overline{x}_1$ hat *Prim*periode p.

c) Anzahl der p-periodischen Punkte

d) $\overline{x}_1$ ist *anziehender* p-periodischer Punkt. *Hinweis: Übertragen Sie die für metrische Räume gegebene Definition eines anziehenden periodischen Punktes auf topologische Räume.*

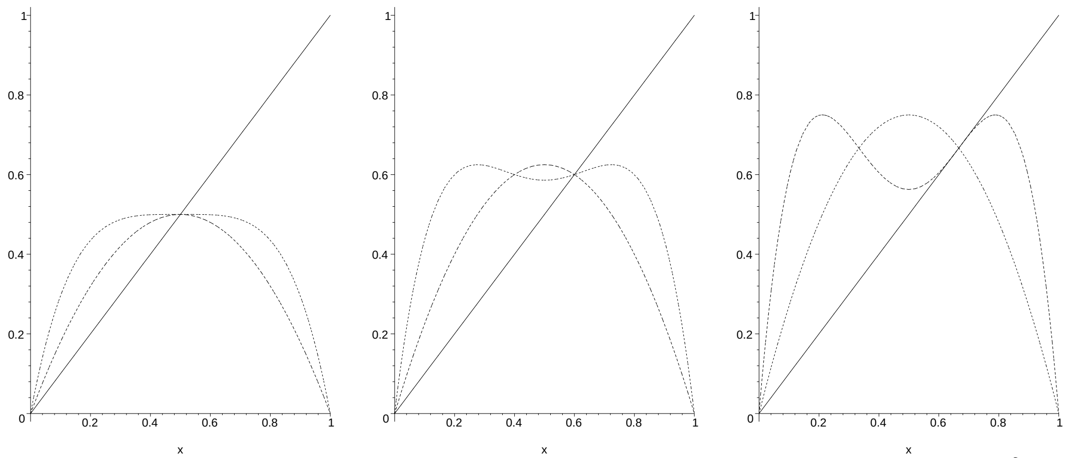
e) Dichtheit der periodischen Orbits

f) Existenz eines dichten Orbits

Präsenzaufgabe C: Der Lyapunov-Exponent λ ist ein quantitatives Maß für die empfindliche Abhängigkeit vom Anfangswert. Sei $F\colon I \longrightarrow I$ eine differenzierbare Abbildung auf einem Intervall I. Weiter sei $\delta_n := F^n(x_0 + \delta_0) - F^n(x_0)$ die Abweichung nach n Schritten. Näherungsweise gilt dann für den Lyapunov-Exponenten die Beziehung $|\delta_n| \approx |\delta_0| \mathrm{e}^{n\lambda}$. Folgern Sie aus dieser Gleichung, dass

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |F'(F^i(x_0))|$$

näherungsweise gilt.



Die logistische Abbildung $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ und die zweite Iterierte $F_\mu^2(x)$ jeweils für $\mu = 2$ (links), $\mu = 2.5$ (mitte) und $\mu = 3$ (rechts) (siehe Aufgabe 6).