RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Wintersemester 2002/03
2002-11-13
Blatt 4

Übungen zur Vorlesung „Dynamische Systeme"

Aufgabe 13:

Sei $F\colon [1,5] \longrightarrow [1,5]$ durch den Polygonzug mit Stützstellen $F(1) = 3$, $F(2) = 5$, $F(3) = 4$, $F(4) = 2$ und $F(5) = 1$ definiert. Zeigen Sie, dass diese Abbildung periodische Punkte aller Primperioden p außer $p = 3$ besitzt. *Hinweis: Satz von Šarkovskij* (Шарковский).

Aufgabe 14:

Sei $F\colon I \longrightarrow I$ eine stetige Abbildung auf dem abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, die einen Punkt mit Primperiode 4 besitzt. Zeigen Sie, dass F dann auch einen Punkt mit Primperiode 2 und einen Fixpunkt hat. *Hinweis: Stellen Sie für jede Möglichkeit aus Präsenzaufgabe B den Markov-Graphen zu den Intervallen $I_1 := [x_1, x_2]$, $I_2 := [x_2, x_3]$ und $I_3 := [x_3, x_4]$ dar.*

Aufgabe 15:

Sei $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(\lambda, x) \mapsto F_\lambda(x)$ stetig differenzierbar, und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein hyperbolischer Fixpunkt von F_{λ_0} (d. h. kein Eigenwert der Ableitungsmatrix $D_x F_{\lambda_0}(x_0)$ hat Absolutbetrag 1). Zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Umgebung U von x_0 und ein offenes Intervall I um λ_0 existiert, so dass F_λ^m für $\lambda \in I$ genau einen Fixpunkt x in U besitzt.

Aufgabe 16:

Untersuchen Sie die Fixpunkte der Abbildung $F_\lambda\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda + x + x^2$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ (Anzahl und Stabilität). Stellen Sie Ihre Ergebnisse in einem Verzweigungsdiagramm dar.

Präsenzaufgabe A:

Sei $F\colon X \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung auf dem metrischen Raum (X, d) mit einem n-periodischen Punkt $x_0 \in X$. Zeigen Sie, dass die Primperiode p von x_0 ein Teiler von n ist.

Präsenzaufgabe B:

Sei $F\colon I \longrightarrow I$ eine stetige Abbildung auf dem abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, die einen Punkt x^* mit Primperiode 4 besitzt. Sei $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ die Bahn von x^* unter F. Geben Sie alle Möglichkeiten für das Quadrupel $(F(x_1), F(x_2), F(x_3), F(x_4))$ an. *Hinweis: Es gibt sechs Möglichkeiten.*

Weitere Informationen unter `http://www.iram.rwth-aachen.de/~enss/DynSys02.html`