RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Wintersemester 2002/03
2002-11-20
Blatt 5

Übungen zur Vorlesung „Dynamische Systeme"

Aufgabe 17: Seien U, V zwei offene Intervalle und $0 \in V$. Weiter sei $G \in C^2(U \times V)$ mit $G(\lambda, 0) = 0$ für alle $\lambda \in U$. Zeigen Sie, dass

$$H(\lambda, x) := \frac{G(\lambda, x)}{x}$$

stetig ergänzbar bei $x_0 = 0$ ist und das die Ergänzung in $C^1(U \times V)$ liegt.

Aufgabe 18: Untersuchen Sie alle Fixpunkte und periodischen Punkte (Anzahl, Stabilität) der Abbildung $F_\lambda \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda \arctan(x)$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$. Stellen Sie Ihre Ergebnisse in einem Verzweigungsdiagramm dar. *Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie in* x *und* λ! *Zeigen Sie, dass* F_λ^n *für* $\lambda > 0$ *strikt konkav auf* $(0, \infty)$ *ist. Folgern Sie daraus, dass* F_λ *genau einen* n*-periodischen Punkt in* $(0, \infty)$ *hat, wenn* $(F_\lambda^n)'(0) > 1$ *gilt bzw. keinen* n*-periodischen Punkt in* $(0, \infty)$ *hat, wenn* $(F_\lambda^n)'(0) \le 1$ *gilt.*

Präsenzaufgabe A: Zeigen Sie, dass $\partial_\lambda H(\lambda, 0) = \partial_\lambda \partial_x G(\lambda, 0)$ für die in Aufgabe 17 gegebene Funktion G und die stetig ergänzte Funktion H gilt.

Präsenzaufgabe B: Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ strikt positiv, strikt konkav auf $(0, \infty)$ (also $f(x) > 0$ und $f''(x) < 0$ für alle $x > 0$) und beschränkt mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

a) (i) $f'(0) > 0$, (ii) f ist streng monoton steigend auf $(0, \infty)$, (iii) f' streng monoton fallend auf $(0, \infty)$, (iv) $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die n-te Iterierte f^n ebenfalls strikt konkav ist. *Hinweis: Versuchen Sie, die Konkavität durch die erste Ableitung auszudrücken.*

Präsenzaufgabe C: Sei $I := (-a, a)$ und $F = F_\lambda \colon I \longrightarrow I$ eine ungerade Funktion in x (d. h. $F(-x) = -F(x)$). Zeigen Sie:

a) 0 ist Fixpunkt von F.

b) Ist $x \in I$ ein k-periodischer Punkt, so ist $-x$ ebenfalls k-periodisch.

c) Ist $x \neq 0$ ein k-*prim*periodischer Punkt, so ist $-x$ ebenfalls k-*prim*periodisch.

d) Sei F stetig differenzierbar. Ist x ein k-periodischer *stabiler (instabilier)* Punkt, so gilt dies auch für $-x$.

Sei nun zusätzlich F_λ ungerade in λ, d. h. $F_{-\lambda}(x) = -F_\lambda(x)$, $\lambda \in J := (-b, b)$.

e) Ist x ein k-periodischer Punkt für F_λ, so ist x ein k-periodischer ($2k$-per.) Punkt für $F_{-\lambda}$, falls k gerade (ungerade) ist. Überträgt sich die Stabilität?

f) Sei $x \neq 0$ *prim*periodisch mit Periode k bezüglich F_λ. Ist k ungerade, so ist x *prim*periodisch mit Periode $2k$ bezüglich $F_{-\lambda}$. Ist k durch 4 teilbar, so hat x die *Prim*periode k (siehe auch Präsenzaufgabe A, Blatt 4). Was ist, wenn $k \equiv 2 \mod 4$ ist? (Beispiel: $F_\lambda(x) := \lambda x$, $\lambda = -1$)

g) Wie können Sie also die Untersuchung einer Funktion F_λ mit allen zuvor genannten Eigenschaften vereinfachen?