RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Wintersemester 2002/03
2002-11-27
Blatt 6

Übungen zur Vorlesung „Dynamische Systeme“

Aufgabe 19: Sei $F_\mu(x) := \mu x(1-x)$, $1 \le \mu \le 4$, die logistische Abbildung auf $[0,1]$. Weisen Sie mittels des Satzes aus der Vorlesung nach, dass bei $\mu = 3$ eine Periodenverdopplung auftritt.

Aufgabe 20: Klassifizieren Sie das *lokale* Bifurkationsverhalten folgender Abbildungen in der Nähe der angegebenen Parameterwerte und diskutieren Sie die Stabilität der entsprechenden Fixpunkte (bzw. 2-periodischen Punkte):

a) $Q_\lambda(x) := \lambda + x^2$, $\lambda_0 = 1/4$

b) $F_\lambda(x) := \lambda \sinh(x)$, $\lambda_0 = 1$ bzw. $\lambda_0 = -1$

c) $F_\lambda(x) := x^2 + \sin(\lambda x)$, $\lambda_0 = 1$, $x_0 = 0$.

Aufgabe 21: Für eine stetige Abbildung $F\colon X \longrightarrow X$ eines metrischen Raumes X in sich selbst definieren wir die Menge der *periodischen* (*rekurrenten* bzw. *nichtwandernden*) Punkte von F durch

$$\begin{aligned} \operatorname{Per}(F) &:= \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N}: \quad F^n(x) = x\} \\ \operatorname{Rec}(F) &:= \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists n > 0: \quad F^n(x) \in U\} \\ \operatorname{Nwa}(F) &:= \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists n > 0, \tilde{x} \in U: \quad F^n(\tilde{x}) \in U\}, \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{U}(x)$ die Menge der Umgebungen von x bezeichnet. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

a) $\operatorname{Per}(F)$, $\operatorname{Rec}(F)$ und $\operatorname{Nwa}(F)$ sind invariant unter F. (Eine Menge $M \subset X$ ist *invariant unter* F, wenn $F(M) \subset M$ gilt.)

b) $\operatorname{Rec}(F) = \{x \in X \mid$ es existiert Teilfolge $(F^{n_k}(x))_k$ von $(F^n(x))_n$ mit $\lim_{k\to\infty} F^{n_k}(x) = x\}$

c) $\operatorname{Nwa}(F)$ ist abgeschlossen.

d) Für die logistische Abbildung F_μ mit $\mu > 2+\sqrt{5}$ gilt $\operatorname{Nwa}(F_\mu) = \Lambda$, $\operatorname{Rec}(F_\mu) \setminus \operatorname{Per}(F_\mu) \neq \emptyset$ und $\operatorname{Nwa}(F_\mu) \setminus \operatorname{Rec}(F_\mu) \neq \emptyset$.

Aufgabe 22: Sei $F\colon I \longrightarrow I$ eine stetig differenzierbare Intervallabbildung, Zeigen Sie, dass nichtentartete homokline Punkte zwar nichtwandernd, aber nicht rekurrent sind (siehe Aufgabe 21). Was kann bei entarteten homoklinen Punkten passieren, insbesondere wenn F auf einem Teilintervall konstant ist?

Zeigen Sie, dass die logistische Abbildung $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ für $\mu > 4$ (bzw. $\mu > 2+\sqrt{5}$) unendlich viele homokline Orbits besitzt. Gibt es für $\mu > 4$ auch entartete homokline Orbits? Gibt es (entartete/nichtentartete) homokline Orbits für $\mu = 4$?

(bitte wenden)

Präsenzaufgabe A:

Sei $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ die logistische Abbildung auf $\mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Bifurkation bei $\mu = 1$.

Präsenzaufgabe B:

(i) Zeigen Sie die Inklusionen $\mathrm{Per}(F) \subset \mathrm{Rec}(F) \subset \mathrm{Nwa}(F)$ für die in Aufgabe 21 definierten Mengen.

(ii) Das dynamische System (X, F) sei topologisch transitiv (d. h. es existiert ein dichter Orbit) und X habe keine diskreten Punkte (d. h. in jeder Umgebung von $x \in X$ gibt es außer x noch mindestens einen weiteren Punkt). Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{Nwa}(F) = X$ gilt.

(iii) Sei $X = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $F(x) \equiv x + \theta (\mod 1)$ für ein $\theta \in [0, 1)$. Diskutieren Sie für unterschiedliche Werte von θ die Mengen $\mathrm{Per}(F)$, $\mathrm{Rec}(F)$ und $\mathrm{Nwa}(F)$ aus Aufgabe 21.

Präsenzaufgabe C:

Zeigen Sie, dass die Intervallabbildung $f(z) = z^2 - 2$, $z \in [-2, 2]$, einen entarteten homoklinen Punkt hat. *Hinweis: Sei z_0 ein Fixpunkt mit $|f'(z_0)| > 1$. Ein abstoßendes Intervall um z_0 lässt sich mittels $|f'(z)| \geq q > 1$ oder anhand der Ungleichung $|f(z) - z_0| > |z - z_0|$ bestimmen.*