RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Wintersemester 2002/03
2002-12-04
Blatt 7

Übungen zur Vorlesung „Dynamische Systeme“

Aufgabe 23:

Sei $f(x) = \alpha x^3 + 3\beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$. Zeigen Sie, dass es einen Diffeomorphismus $\Phi(y) = x$ gibt, so dass $\dot{x} = f(x)$ differenzierbar konjugiert zu $\dot{y} = g(y)$ mit $g(y) = \pm y^3 + dy + c$ ist. Bestimmen Sie das Vorzeichen sowie c und d in Abhängigkeit von α, β, γ und δ. *Hinweis: Φ ist eine affine Transformation.*

Aufgabe 24: Gegeben sei die eindimensionale autonome Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ auf dem offenen Intervall $U \subset \mathbb{R}$, wobei $f \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ (f muss nicht notwendig Lipschitzstetig sein).

a) Zeigen Sie, dass ein lokaler Existenz- und *Eindeutigkeitssatz* gilt (sogar für die Differentialgleichung $\dot{x} = h(t)f(x)$ mit stetiger Funktion h).

b) Sei $I = [a, b] \subset U$ ein kompaktes Intervall. Zeigen Sie, dass jede Lösung der autonomen DGl eine maximale Verweilzeit hat, d. h., es gibt ein $T(I) > 0$ so dass für jeden Anfangswert $x_0 \in I$ Zeiten $t_\pm = t_\pm(x_0)$ mit $|t_\pm| < T(I)$ existieren, so dass die Lösung für alle $t_- < t < t_+$ existiert aber $x(t_\pm) \notin (a, b)$ gilt.

c) Machen Sie sich durch ein einfaches Beispiel klar (graphisch oder analytisch), dass in Dimensionen größer als 1 eine Aussage wie in b) im Allgemeinen nicht richtig ist (d. h. ein Kompaktum K mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ wird möglicherweise *nicht* verlassen).

Aufgabe 25:

Für $m > 0$ betrachten wir die einparametrige Familie $f_\lambda(x) = \lambda + (1 + m\lambda)x - x^3$. Skizzieren Sie das Bifurkationsdiagramm der Differentialgleichung $\dot{x} = f_\lambda(x)$ für die Fälle $m > 1$, $m = 1$ und $0 < m < 1$, d. h.

a) zeichnen Sie die Gleichgewichtslagen $\overline{x}$ in einem Diagramm mit $\overline{x}$ über λ ein, und kennzeichnen Sie die Stabilität;

b) skizzieren Sie den Graphen von f_λ und das zugehörige (eindimensionale) Vektorfeld jeweils für die strukturell stabilen λ-Intervalle *und* für die Bifurkationspunkte.

Hinweis: In der Vorlesung wurde $f(x) = c + dx - x^3$ untersucht. Die Familie f_λ entspricht einer durch λ parametrisierten Geraden in der (c, d)-Ebene.

(bitte wenden)

Aufgabe 26:

Das Wachstum einer Population $x = x(t) \geq 0$ sei logistisch (Wachstumsrate $k > 0$, Dämpfung durch Überpopulation $c > 0$). Zusätzlich werde ein Teil der Population entnommen (gejagt oder geerntet, „harvested“, Parameter $h > 0$). Man sagt, dass die Population ausstirbt, falls eine (endliche) Zeit t mit $x(t) = 0$ existiert.

(i) **Konstante Entnahmerate:** Die Population verhalte sich gemäß der Differentialgleichung $\dot{x} = kx - cx^2 - h$. Zeigen Sie, dass für eine kleine Entnahmerate $0 < h \leq k^2/(4c)$ ein Schwellenwert $\overline{x}_0$ existiert, so dass für einen Anfangswert oberhalb von $\overline{x}_0$ die Population gegen eine Gleichgewichtslage konvergiert bzw. für einen Anfangswert unterhalb von $\overline{x}_0$ ausstirbt. Zeigen Sie außerdem, dass die Population immer ausstirbt, wenn $h > k^2/(4c)$ gilt, wenn also zuviel entnommen wird.

(ii) **Proportionale Entnahmerate:** Die Population verhalte sich gemäß der Differentialgleichung $\dot{x} = kx - cx^2 - hx$. Zeigen Sie, dass für eine große Entnahmerate $h > k$ die Population unabhängig vom Anfangswert gegen 0 konvergiert, aber in endlicher Zeit nicht ausstirbt. Was passiert im Fall $h \leq k$?

Hinweis: Sie können die Aufgabe auch bearbeiten, ohne die Lösungen der Differentialgleichungen explizit zu berechnen.

Präsenzaufgabe A:

Sei $f(x) = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Zeigen Sie, dass es einen Diffeomorphismus $\Phi(y) = x$ gibt, so dass $\dot{x} = f(x)$ differenzierbar konjugiert zu $\dot{y} = g(y)$ mit $g(y) = y^2 + c$ ist. Bestimmen Sie c in Abhängigkeit von α, β und γ. *Hinweis: Φ ist eine affine Transformation.*

Präsenzaufgabe B:

Sei $x = x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ auf $\mathbb{R}$ zum Anfangswert $x_0 = x(0)$, wobei $f(x) \geq m > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass ein Zeitpunkt $t_+ = t_+(x_0, a)$ existiert, so dass $x(t) > a$ für alle $t > t_+$ gilt.