Übungen zur Vorlesung „Dynamische Systeme“

Aufgabe 27: Eine Differentialgleichung in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sei in Polarkoordinaten (r, φ), $r > 0$ durch

$$\dot{r} = -r^\alpha \qquad \dot{\varphi} = r^\beta$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegeben. Für welche Paare (α, β) läuft die Lösung in endlicher Zeit in den Ursprung, d. h. wann ist $t_+ := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid r(t) > 0\} < \infty$? Für welche Parameter haben die Lösungskurven endlich bzw. unendlich viele Umläufe um den Ursprung?

Aufgabe 28: Für $\mathbf{x} = (p, \varphi)$ mit $p \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ betrachten wir die Pendelgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ p \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Sie beschreibt ein Pendel mit der oberen Ruhelage in $(0, 0)$. Sei $H = H(p, \varphi)$ die Hamilton-Funktion aus Präsenzaufgabe B.

a) Gesucht ist eine Lösung $(p(t), \varphi(t))$, die für $t \to \pm\infty$ aus der oberen Gleichgewichtslage heraus- bzw. in sie hineinläuft. Nach Präsenzaufgabe B ist die Hamilton-Funktion auf jeder Bahn konstant und hier gilt $H(0, 0) = 0$. Gewinnen Sie hieraus eine Differentialgleichung erster Ordnung für $\varphi(t)$, lösen Sie diese und bestimmen Sie dann $p(t)$.

   Hinweis: Es gilt $1 - \cos\varphi = 2\sin^2(\varphi/2)$.

b) Bestimmen Sie die Variationsgleichung, d. h. die Differentialgleichung für $(D\Phi_t)(\mathbf{x})$ längs dieser Lösung.

Aufgabe 29: In Aufgabe 28 ist $\lim_{t\to\pm\infty}(D\mathbf{f})(p(t), \varphi(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} := A$. Lösen Sie das matrixwertige Anfangswertproblem $\dot{M} = AM$, $M(0) = \mathbb{1}$. Betrachten Sie $\lim_{t\to\pm\infty} M(t)\mathbf{v}$ für geeignet gewählte Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Stellen Sie den Zusammenhang mit dem asymptotischen Verhalten der Linearisierung in Aufgabe 28 nahe dem Sattel $(p, \varphi) = (0.0)$ her.

Präsenzaufgabe A: Seien $f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und strikt positiv mit $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(x)} dx < \infty$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g(x)} dx < \infty$. Sind die Differentialgleichungen $\dot{x} = f(x)$ und $\dot{y} = g(y)$ durch einen (globalen) Diffeomorphismus $\Phi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = \Phi(y)$ konjugiert? Ist das maximale Existenzintervall der Lösung zu $\dot{x} = f(x)$ bzw. $\dot{y} = g(y)$ beschränkt?

Präsenzaufgabe B: Gegeben sei die Pendelgleichung (**??**). Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion zu diesem System, d. h., bestimmen Sie eine Funktion $H(p, \varphi)$ mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\partial_\varphi H \\ \partial_{\mathbf{p}} H \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad H(0, 0) = 0.$$

Zeigen Sie außerdem, dass H längs Lösungen der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ zeitlich konstant ist.

Weitere Informationen unter `http://www.iram.rwth-aachen.de/~enss/DynSys02.html`