RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Wintersemester 2002/03
2003-01-08
Blatt 9

Übungen zur Vorlesung „Dynamische Systeme“

Aufgabe 30: Betrachten Sie folgende durch $\mu \in \mathbb{R}$ parametrisierte Differentialgleichungen in $\mathbb{R}^2$. In Polarkoordinaten sei $\dot{\varphi} = 1$ und $\dot{r} = f_\mu(r)$ für $r \geq 0$. Ordnen Sie die folgenden Vektorfelder den (perspektivisch nicht sehr gut) skizzierten Phasenproträts zu (mit kurzer Begründung):

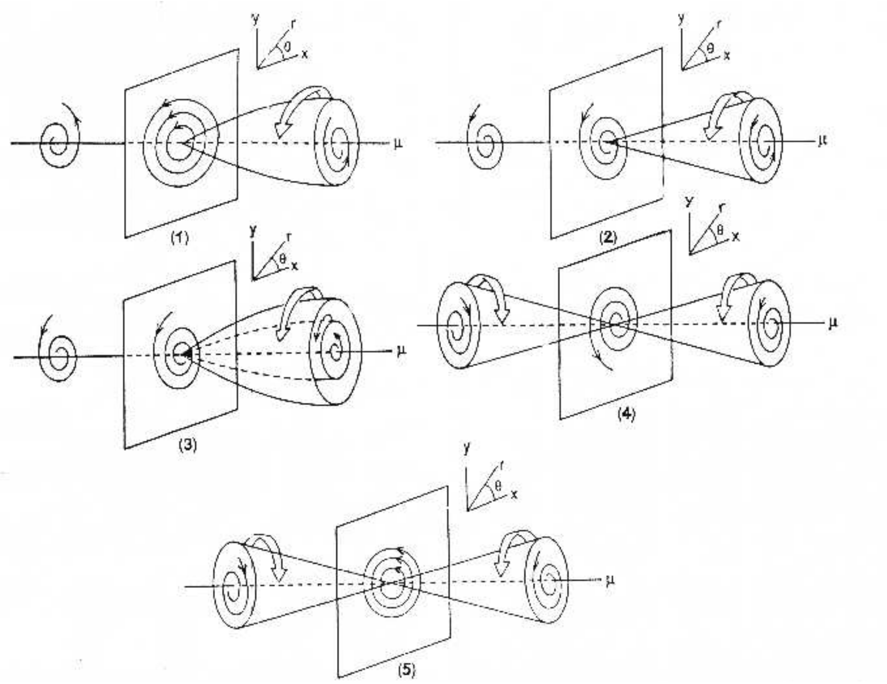
a) $f_\mu(r) = -r(r-\mu)^2$

b) $f_\mu(r) = r(\mu - r^2)(2\mu - r^2)^2$

c) $f_\mu(r) = r(r+\mu)(r-\mu)$

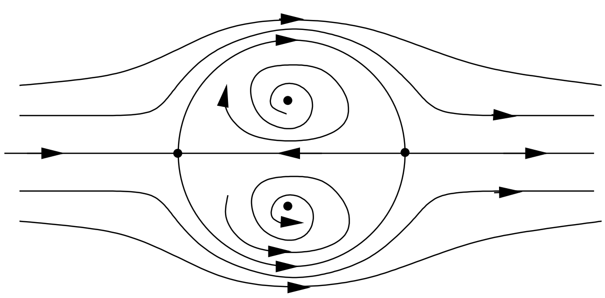
d) $f_\mu(r) = -\mu r(r-\mu)^2$

e) $f_\mu(r) = -\mu^2 r(r+\mu)^2(r-\mu)^2$



Aufgabe 31:

a) Die nebenstehende Skizze zeigt das Phasenporträt einer Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{f} \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Die vier Punkte bezeichnen hierbei Gleichgewichtslagen. Beachten Sie den Drehsinn der Spiralen! Bestimmen Sie die α- und ω-Limesmengen sämlicher Orbits sowie die rekurrenten und die nichtwandernden Punkte des zugehörigen Flusses.



(bitte wenden)

b) Geben Sie außerdem die ω-Limesmengen sowie die (pos.) rekurrenten und nichtwandernden Punkte zur Differentialgleichung aus Aufgabe 30 e) an.

Aufgabe 32: Der Fluss $\Phi_t(\mathbf{x})$ der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu$, existiere für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$. Zum Fluss Φ bezeichnen wir die Menge der *periodischen* (*(positiv) rekurrenten* bzw. *(positiv) nichtwandernden*) Punkte mit $\mathrm{Per}(\Phi)$, $\mathrm{Rec}(\Phi)$ bzw. $\mathrm{Nwa}(\Phi)$. wobei $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ die Menge der Umgebungen von $\mathbf{x}$ bezeichnet. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

a) $\mathrm{Per}(\Phi)$, $\mathrm{Rec}(\Phi)$ und $\mathrm{Nwa}(\Phi)$ sind invariant unter Φ. (Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^\nu$ ist *invariant unter* Φ, wenn $\Phi_t(M) \subset M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.)

b) $\mathrm{Nwa}(\Phi)$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 33: In der Umgebung $U_{r_0} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu \mid |x_1| \leq h, x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 \leq r_0^2\}$ sei das Vektorfeld der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ gegeben durch $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1, 0, \ldots, 0) =: \mathbf{e}_1$ (dies ist lokal immer nach dem Begradigungssatz für nichtverschwindende Vektorfelder möglich). Mit $\Phi_t(\mathbf{x})$ bezeichnen wir den Fluss dieser Differentialgleichung. Weiter sei

$$\Sigma_{r_0} := \{\mathbf{x} \in U_{r_0} \mid g(\mathbf{x}) = 0\}, \quad g \in C^1(U_{r_0}, \mathbb{R}), \quad g(\mathbf{0}) = 0$$

und $(\nabla g)(\mathbf{0})$ sei nicht senkrecht zu $\mathbf{e}_1$. Außerdem sei Σ_{r_0} zusammenhängend (ansonsten wähle man die Zusammenhangskomponente, die $\mathbf{0}$ enthält, oder man verkleinere $h > 0$). Zeigen Sie:

a) Es gibt ein $0 < r < r_0$, so dass Σ_r ein transversaler Schnitt ist, d. h., dass Σ_r Graph einer Funktion $x_1 = \xi(x_2, \ldots, x_\nu)$ ist.

b) Zu jedem $\mathbf{y} \in U_r$ gibt es ein $t \in \mathbb{R}$, so dass $\Phi_t(\mathbf{y}) \in \Sigma_r$ gilt. Geben Sie eine obere Schranke für $|t|$ an.

Präsenzaufgabe A: Skizzieren Sie das Phasenporträt der in Polarkoordinanten in $\mathbb{R}^2$ gegebenen Differentialgleichung $\dot{\varphi} = 1$, $\dot{r} = (1 - r)$, $r \geq 0$. Geben Sie zu jedem Orbit die α- bzw. ω-Limesmenge an. Welche Punkte sind rekurrent und welche nichtwandernd?

Präsenzaufgabe B: Zeigen Sie die Inklusionen $\mathrm{Per}(\Phi) \subset \mathrm{Rec}(\Phi) \subset \mathrm{Nwa}(\Phi)$.

Präsenzaufgabe C: Der Fluss $\Phi_t(\mathbf{x})$ der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ existiere für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$. Sei x ein (positiv) rekurrenter Punkt. Zeigen Sie, dass dann jeder Punkt der Bahn $\mathcal{O}(\mathbf{x}) = \{\Phi_t(\mathbf{x}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbf{x}$ ein (positiver) rekurrenter Punkt ist.

Präsenzaufgabe D: Berechnen Sie den Fluss $\Phi_t(\mathbf{x})$ aus Aufgabe 33.