RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Wintersemester 2002/03
2003-01-27
Blatt 11

Übungen zur Vorlesung „Dynamische Systeme“

Aufgabe 38: Sei $\{\mathbf{x}^p(t) \,|\, 0 \le t \le T\}$ eine T-periodische Bahn eines T-periodischen Flusses, also $\Phi(t_0 \to t_0 + T; \mathbf{x}^p(t_0)) = \mathbf{x}^p(t_0)$.

a) Zeigen Sie: Wenn $\mathbf{x}^p(t_0)$ ein hyperbolischer Fixpunkt von $F_{t_0} := \Phi(t_0 \to t_0 + T; \cdot)$ ist, dann ist $\mathbf{x}^p(t_1)$ auch ein hyperbolischer Fixpunkt der entsprechenden Flussabbildung F_{t_1} für jedes $t_1 \in \mathbb{R}$.

b) Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu$. Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} F_{t_0}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^p(t_0)$ genau dann gilt, wenn $\lim_{t\to\infty} |\Phi(t_0 \to t; \mathbf{x}) - \mathbf{x}^p(t)| = 0$ ist.

Aufgabe 39: Berechnen Sie die Gleichgewichtslagen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x \\ 2x - y - xz \\ -z + xy \end{pmatrix} =: \mathbf{f}(x, y, z),$$

berechnen Sie jeweils die Linearisierung um die Gleichgewichtslage und geben Sie jeweils die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten der Linearisierung um die Gleichgewichtslage an.

Aufgabe 40: Berechnen Sie die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x - \mu x(x^2 + y^2) \\ -x - y - \mu y(x^2 + y^2) \\ z(1 + \mu^2 \cosh(xyz^2)) \end{pmatrix} =: \mathbf{f}(x, y, z).$$

Aufgabe 41: Berechnen Sie die Fixpunkte der Abbildung

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \begin{pmatrix} (x^2 + (y-1)^2 + z^2)(-x/2 + y) + x \\ (x^2 + (y-1)^2 + z^2)(-9x - y/2) + y \\ -3(x^2 + (y-1)^2 + z^2)(z - 1) + z \end{pmatrix}, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

und jeweils die Linearisierung um die Fixpunkte. Geben Sie jeweils die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten der Linearisierung um die *hyperbolischen* Fixpunkte an.

(bitte wenden)

Präsenzaufgabe A:

Sei $V(x) := -\frac{1}{2}x^2(1-x)^2$ ein Potential. Die zur Hamiltonfunktion $H(x,p) := p^2/2 + V(x)$ gehörige Differentialgleichung lautet dann $\dot{x} = \partial_p H = p$ und $\dot{p} = -\partial_x H = -V'(x)$. Das entsprechende Vektorfeld $\mathbf{f}(x,p) = (\dot{x},\dot{p})$ hat eine hyperbolische Gleichgewichtslagen in $(x,p) = (0,0)$.

Geben Sie die Linearisierung und die (in)stabilen Mannigfaltigkeiten der Linearisierung um $(x,p) = (0,0)$ an. Berechnen Sie die Funktion h^u bezüglich geeignet gewählten Koordinaten (vgl. Abschnitt 4.3 der Vorlesung, dort ähnliches Problem).

Präsenzaufgabe B:

(i) Zwei Matrizen A, B heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix M mit $B = MAM^{-1}$ gibt. Welche Beziehung gilt zwischen den Eigenwerten von A und B?

(ii) Sei $\mathbf{x}(t) := \Phi(t_0 \to t; \mathbf{x})$ der Fluss einer Differentialgleichung. Berechnen Sie die Ableitung von $\Phi(t_1 \to t_2; \cdot) \circ \Phi(t_0 \to t_1; \cdot)$ mit der Kettenregel. Drücken Sie die Ableitung von $\Phi(t_0 \to t_1; \cdot)$ durch die Ableitung von $\Phi(t_1 \to t_0; \cdot)$ aus.

Präsenzaufgabe C:

Sei $\dot{x} = f(x)$ mit $f(x) = x^2(1-x^2)$. Zeichnen Sie das Phasenportrait und geben Sie die (in)stabilen Mannigfaltigkeiten zu allen Gleichgewichtslagen an.

Präsenzaufgabe D:

Lösen Sie Aufgabe 40 im Spezialfall $\mu = 0$.