RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Wintersemester 2002/03
2003-02-03
Blatt 12

Übungen zur Vorlesung „Dynamische Systeme“

Aufgabe 42:
Bei der Berechnung der Melnikov-Funktion (Мельников) zum periodisch gestörten Duffing-Oszillator tritt das Integral

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt, \qquad f(t) := \cos(\omega t)/\cosh t$$

auf. Zeigen Sie, dass $I = \pi/\cosh(\omega\pi/2)$ gilt, indem Sie folgende Schritte beweisen:
(i) Zeigen Sie, dass f für jedes $a > 0$ genau eine einfache Polstelle $z_0 = i\pi/2$ im Rechteck $C := [-a, a] + [0, i\pi] \subset \mathbb{C}$ hat.
(ii) Zeigen Sie, dass

$$\Big|\int_0^{\pi} \frac{\cos(\omega(\pm a + iy))}{\cosh(\pm a + iy)} dy\Big| \le \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-a}$$

gilt.
(iii) Zeigen Sie, dass

$$\int_{a+i\pi}^{-a+i\pi} f(z)\,dz = \cosh(\pi\omega) \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

gilt.
(iv) Folgern Sie aus dem Residuensatz $\int_{\partial C} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0)$ die Behauptung. *Hinweis: Es gilt* $1 + \cosh(u) = 2\cosh^2(u/2)$.

Aufgabe 43:
Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(\mu, \tau) \mapsto \varphi(\mu, \tau)$, $\varphi \in C^2$, $\varphi(0, \tau) = 0$ für alle τ, und $\partial_\mu \varphi(0, \tau)$ habe bei τ_0 eine einfache Nullstelle. Zeigen Sie:

a) Es gibt ein $\mu_0 > 0$, so dass für jedes μ mit $0 < |\mu| \le \mu_0$ die Funktion $\varphi(\mu, \cdot)$ eine einfache Nullstelle τ_μ nahe τ_0 hat.

b) Sei $\psi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi \in C^1$. Für jedes μ mit $0 < |\mu| \le \mu_0$ schneiden sich die Tangenten an die Graphen von $\psi(\mu, \cdot)$ und $(\psi(\mu, \cdot) + \varphi(\mu, \cdot))$ im Punkt τ_μ transversal.

Aufgabe 44: Sei $H(x, p) := p^2/2 + \cos x - 1$ die Hamilton-Funktion zum mathematischen Pendel ($x = 0$ entspricht der oberen Gleichgewichtslage). Das zugehörige Vektorfeld $\hat{\mathbf{f}}$ hat eine homokline Bahn gegeben durch $\mathbf{z}^0(t) = (x^0(t), p^0(t))^{\mathrm{T}}$ mit $x^0(t) = 4\arctan(\mathrm{e}^t)$ und $p^0(t) = 4\mathrm{e}^t/(1 + \mathrm{e}^{2t}) = 2/\cosh t$ (vgl. Aufgabe 28). Wir betrachten das periodisch gestörte Vektorfeld $\mathbf{f}(\mu, \mathbf{z}; t) := \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) + \mu\mathbf{g}(\mathbf{z}; t)$ mit

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}; t) = \mathbf{g}(x, p; t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\omega t) - \lambda p \end{pmatrix}$$

(bitte wenden)

mit Dämpfungskonstante $\lambda > 0$ und (Kreis-)Frequenz $\omega > 0$.

Berechnen Sie die zugehörige Melnikov-Funktion

$$M(\tau, \varphi_0) := \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla H)(\mathbf{z}^0(t-\tau)) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{z}^0(t-\tau); \varphi_0/\omega + t)\, dt.$$

a) In welchen Fällen (Bedingung zwischen ω und λ) gibt es einen nicht entarteten homoklinen Punkt? In welchen Fällen nicht? *Hinweis: Nutzen Sie die Integralberechnung aus Aufgabe 42!*

b) Was ändert sich, wenn der Dämpfungsterm $-\lambda p$ durch $-\lambda p^2$ ersetzt wird?

Präsenzaufgabe A: Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Geben Sie in jedem Punkt des Graphen von f einen Tangentialvektor an. Wann schneiden sich zwei Tangenten transversal?

Präsenzaufgabe B: Zeigen Sie, dass $M(\tau, \varphi_0) = M(0, \varphi_0 + \omega\tau)$ gilt.

Präsenzaufgabe C: Berechnen Sie das Residuum $\mathrm{Res}(f, z_0)$ von der Funktion f aus Aufgabe 42 an der Polstelle $z_0 = i\pi/2$.