HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 22.10.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 1

Abgabe: bis 31.10.2008, 12:00 Uhr in RUD25, 2.421d (Kopierraum)

---

1. **Mengen [2+2+2 P]:** Beweisen Sie für die (zweistelligen) Operationen Vereinigung und Durchschnitt von Mengen folgende Eigenschaften:
   a) Kommutativität,
   b) Assoziativität,
   c) Distributivität.

2. **De Morgansche Regeln [2+2 P]:** Seien $A, B \subseteq X$. Beweisen Sie die Regeln von de Morgan:
   a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$,
   b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

3. **Permutationen [4 P]:** Beweisen Sie:

   Die Anzahl der Permutationen $n \in \mathbb{N}$ verschiedener Elemente ist $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

4. **Körpereigenschaften [1+1+1+1+1+1 P]:** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper. Beweisen Sie, dass folgende Eigenschaften gelten:
   a) $1 \in \mathbb{K}$ ist eindeutig bestimmt,
   b) $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $x \neq 0$ ist $x^{-1} \in \mathbb{K}$ eindeutig bestimmt,
   c) $a \cdot x = b$ besitzt $\forall a, b \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0$ die eindeutig bestimmte Lösung $x = a^{-1} \cdot b$,
   d) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K}$,
   e) $-x = (-1) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{K}$,
   f) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 29.10.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 2

Abgabe: bis 07.11.2008, 12:00 Uhr in (bzw. vor) 2.421d (Kopierraum), RUD25

---

1. **Kubikzahlen [4 P]:** Beweisen Sie, dass die Summe der ersten $n \in \mathbb{N}$ natürlichen Kubikzahlen gleich dem Quadrat der Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist,

$$1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

2. **Dreiecksungleichung [4 P]:** Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ beliebige reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die folgende Dreiecksungleichung gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

3. **Die metrischen Axiome [2+2+2 P]:** Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Der Abstand zwischen den Zahlen x und y ist

$$|x - y| =: d(x, y).$$

Die Abbildung $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird auch eine *Metrik* genannt. Beweisen Sie, dass $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften (die sog. *metrischen Axiome*) gelten:

   a) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
   b) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).
   c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

4. **Abschätzung der Fakultät [6 P]:** Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Abschätzung gilt:

$$n! \leq 2 \left(\frac{n}{2} \right)^n.$$

Tipp: Zeigen Sie – unter Verwendung der Bernoulli-Ungleichung – vorbereitend, dass

$$2\, n^n \leq (n + 1)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 05.11.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 3

Abgabe: bis 14.11.2008, 12:00 Uhr in (bzw. vor) 2.421d (Kopierraum), RUD25

---

1. **Nullfolgen [3 P]:** Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

2. **Grenzwerte [1+1+1+2+2 P]:** Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen:

   a) $\left(\frac{14}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

   b) $\left(\frac{6\,n^4+3\,n^2+2}{7\,n^4+12\,n^3+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

   c) $\left(\sqrt[n]{b}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für $b\in\mathbb{R}$ mit $b>0$,

   d) $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

   e) $\left(\left(\frac{n+1}{\sqrt{n}}\right)^2-n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. ***Sandwich*-Prinzip [5 P]:** Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen, deren Glieder die Ungleichungen
$$a_n \le b_n \le c_n \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$
erfüllen. Beweisen Sie, dass aus
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lambda \in \mathbb{R}$$
die Konvergenz von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lambda$ folgt.

4. **Konvergenz und Grenzwert [5 P]:** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge mit den Gliedern
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k}.$$
Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert und den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$ besitzt.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 12.11.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 4

Abgabe: bis 21.11.2008, 12:00 Uhr in (bzw. vor) 2.421d (Kopierraum), RUD25

---

1. **Grenzwerte [4+2+2 P]:**

   a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n > -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei k eine positive ganze Zahl. Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
   $$b_n = \sqrt[k]{1+a_n} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   eine Nullfolge ist.

   b) Es sei für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Gliedern
   $$a_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   definiert. Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Folge.

   c) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge mit den Gliedern $a_n = \sqrt{4n^2+5n+2} - 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{4}.$$

2. **Cauchy-Folgen [3 P]:** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine relle Zahlenfolge, die
   $$|a_{n+1} - a_n| \le 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   erfüllt. Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Treffen Sie damit eine Aussage über die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. **Konvergenz [6 P]:** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge, deren Glieder durch
   $$a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   gegeben sind. Untersuchen Sie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

4. **Wert einer Reihe [3 P]:** Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 19.11.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 5

Abgabe: bis 28.11.2008, 12:00 Uhr **in 1.302 (Öffnungszeiten: Mo-Do 8-15 Uhr, Fr 8-12 Uhr)**, RUD25.

---

1. **Für alle $\varepsilon > 0$ existiert... [1+1+1 P]:** Gegeben seien die zwei positiven reellen Zahlen

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1000}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{1000000}.$$

Bestimmen Sie für jede der Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürliche Zahlen n_1, n_2, so dass für alle $n \geq n_k$, $n \in \mathbb{N}$ jeweils $|a_n - 0| < \varepsilon_k$ gilt ($k \in \{1,2\}$):

a) $a_n = \dfrac{1}{n!}$, b) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, c) $a_n = \dfrac{1}{n^3+1}$.

2. **Grenzwert vs. Häufungspunkt [2+2+2 P]:** Bestimmen Sie die Grenzwerte bzw. Häufungspunkte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen:

a) $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$,

b) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n} & \text{für} \quad n = 3k,\ k \in \mathbb{N} \\ 2 + \frac{n+1}{n} & \text{für} \quad n = 3k-1,\ k \in \mathbb{N} \\ 2 & \text{für} \quad n = 3k-2,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$,

c) $a_n = n^2 q^n$ mit $q \in \mathbb{R}$ und $0 < |q| < 1$.

3. **Konvergenzkriterium [3 P]:** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz von $\sum a_n$ die Konvergenz von $\sum \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ folgt.

4. **(Absolute) Konvergenz [2+2+2+2 P]:** Welche der folgenden Reihen konvergiert? Welche konvergiert absolut? Begründen Sie Ihre Aussagen.

a) $\sum \dfrac{n}{2^n}$, b) $\sum \dfrac{2^n+1}{3^n-4}$, c) $\sum (-1)^n \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, d) $\sum \dbinom{5n}{4n}^{-1}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 26.11.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 6

Abgabe: bis 05.12.2008, 12:00 Uhr **in 1.302 (Öffnungszeiten: Mo-Do 8-15 Uhr, Fr 8-12 Uhr)**, RUD25.

---

1. **Fehlerabschätzung [3 P]:** Der Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

ist die Eulersche Zahl e = 2.7182818285... . Ab welchen Indizes n wird der Fehler E_n, der bei der Berechnung mittels der Partialsumme begangen wird, d.h.

$$E_n = \left| \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right|,$$

kleiner als 1/2, 1/100 bzw. 1/10000?

2. **Konvergenzkriterien [1+2+2+2 P]:** Welche der folgenden Reihen konvergiert? Welche divergiert? Begründen Sie Ihre Aussagen.

a) $\sum \frac{1}{(2k)^l}$, $l \in \mathbb{N}$ fixiert, b) $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt[k]{k}}$, c) $\sum \frac{k^2}{2^k}$, d) $\sum \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$.

3. **Cauchy-Produkt I [3+3 P]:** Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge mit den Gliedern

$$a_k = (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum a_k$ zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergent ist. Zeigen Sie weiterhin, dass das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst divergiert.

4. **Cauchy-Produkt II [4 P]:** Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{cases} 3 & \text{für} \quad k = 0 \\ 3^k & \text{für} \quad k \geq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \begin{cases} -2 & \text{für} \quad k = 0 \\ 2^k & \text{für} \quad k \geq 1 \end{cases}$$

sowie deren Cauchy-Produkt auf Konvergenz.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 03.12.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 7

Abgabe: bis 12.12.2008, 12:00 Uhr in 1.302 (Öffnungszeiten: Mo-Do 8-15 Uhr, Fr 8-12 Uhr), RUD25.

---

1. **Abzählbarkeit [4 P]:** In der Vorlesung wurde Ihnen folgender Satz bewiesen:

   $$\text{Ist } M_n \subseteq \mathbb{R} \text{ abzählbar für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ so ist } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \subseteq \mathbb{R} \text{ abzählbar.}$$

   Zeigen Sie mit Hilfe dieses Satzes, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist.

2. **Offene Mengen [4+2 P]:** Beweisen Sie, dass der Durchschnitt endlich vieler offener Teilmengen von $\mathbb{R}$ offen ist. Zeigen Sie dann, anhand eines Beispiels, dass der Durchschnitt unendlich vieler offener Teilmengen von $\mathbb{R}$ nicht offen zu sein braucht.

3. **Häufungspunkte I [2+2 P]:** Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei nach oben beschränkte Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

   a) $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$,

   b) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

4. **Häufungspunkte II [2+2+2 P]:** Bestimmen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ für jede der nachstehenden reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

   a) $a_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$,

   b) $a_n = \begin{cases} 11 + \frac{1}{2^n} & \text{für} \quad n = 3k,\ k \in \mathbb{N} \\ 7 + \frac{n+1}{n} & \text{für} \quad n = 3k-1,\ k \in \mathbb{N} \\ 4 & \text{für} \quad n = 3k-2,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$,

   c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 10.12.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I

Serie 8

Abgabe: bis 19.12.2008, 12:00 Uhr in 1.302 (Öffnungszeiten: Mo-Do 8-15 Uhr, Fr 8-12 Uhr), RUD25.

---

1. **Exponentialfunktion [3+3 P]:** Beweisen Sie:

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

2. **Grenzwerte [2+2+3 P]:** Bestimmen Sie die nachstehenden Grenzwerte, sofern diese existieren (Begründung):

   a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

   c) $\lim\limits_{x\to0} \left(2 + x\sqrt{1+(4/x^2)}\right)$.

3. **Stetigkeit [4 P]:** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch die Zuordnung

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^4-10x^2+9}{x^2-4x+3} & \text{falls } x \neq 1 \wedge x \neq 3 \\ \alpha & \text{falls } x = 1 \\ \beta & \text{falls } x = 3. \end{cases}$$

   Können die reellen Zahlen α und β so gewählt werden, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist? Begründen Sie ihre Antwort.

4. **Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$... [1+1+1 P]:** Gegeben sei die Funktion

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) := x^3 - x + 1 \in \mathbb{R}.$$

   Bestimmen Sie reelle Zahlen $\delta > 0$, so dass für $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x-2| < \delta$$

   a) der Abstand $\left|f(x) - f(2)\right|$ kleiner ist als $\varepsilon = 1/10$.

   b) der Abstand $\left|f(x) - f(2)\right|$ kleiner ist als $\varepsilon = 1/1000$.

   c) der Abstand $\left|f(x) - f(2)\right|$ kleiner ist als $\varepsilon = 1/1000000$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 17.12.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Zusatz-Serie

Abgabe: bis 09.01.2009, 12 Uhr in/vor 1.302 (Öffnungszeiten: Mo-Do 8-15 Uhr, Fr 8-12 Uhr), RUD25.

---

1. **Vollständige Induktion [2* P]:** Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} k\,x^k = \frac{x}{x-1}\left(n\,x^n - \frac{x^n-1}{x-1}\right).$$

2. **Grenzwerte spezieller Folgen [1*+1*+2* P]:** Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$
Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Tatsache den Grenzwert für jede der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\geq k}$, sofern dieser existiert (Begründung):
   a) $a_n = \left(1+(3\,n)^{-1}\right)^n$, $k=1$.
   b) $a_n = \left(1-(n-2)^{-1}\right)^{n+5}$, $k=3$.
   c) $a_n = \left(3-n^{-1/2}\right)\left(1+3\,n^{-1}\right)^n\left(6+n^{-1000}\right)^{-1}\left(1+n^{-1}\right)^{-87}\left(1-n^{-1}\right)^{-n}$, $k=2$.

3. **Konvergenz einer Reihe [3* P]:** Es seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, reelle Zahlen, die
$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n = 0$$
erfüllen. Hiermit sei über
$$b_k := \lambda_1\,a_{k+1} + \lambda_2\,a_{k+2} + \ldots + \lambda_n\,a_{k+n} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$$
die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen definiert. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum b_k$ konvergent ist und ihr Wert durch folgenden Ausdruck gegeben ist:
$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \lambda_1\,a_1 + (\lambda_1+\lambda_2)\,a_2 + \ldots + (\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1})\,a_{n-1}.$$

4. **Nullstellen [1*+1* P]:** Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ für jeden der nachstehenden Ausdrücke $f(x)$:
   a) $f(x) = \exp\left(x^2 - 2\sqrt{x^2}\right) - \frac{1}{\mathrm{e}}$, b) $f(x) = 1+\sqrt{8\,x+1} - \sqrt{10\,x+6}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 17.12.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I

Serie 9

Abgabe: bis 09.01.2009, 12 Uhr in/vor 1.302 (Öffnungszeiten: Mo-Do 8-15 Uhr, Fr 8-12 Uhr), RUD25.

---

1. **Stetigkeit [2+2+2 P]:** Bestimmen Sie die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

für jeden der nachstehenden Ausdrücke $f(x)$. Für welche $x_0 \in M$ ist die Funktion

$$\mathbb{R} \supseteq M \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

stetig in x_0? Begründen Sie Ihre Aussagen.

a) $f(x) = \left(\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3}\right)\left(x - 5\sqrt{x} + 6\right)^{-1}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$.

c) $f(x) = x - [x]$, wobei $[x] := z$, falls $z \in \mathbb{Z}$ und $z \le x < z+1$.

2. **Gleichmäßige Stetigkeit [2+2+2 P]:** Untersuchen Sie jede der nachstehenden stetigen Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

a) $(1,\infty) \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$, b) $(0,1) \ni y \mapsto y^2 \in \mathbb{R}$, c) $(0,\infty) \ni z \mapsto z^2 \in \mathbb{R}$.

3. **Umkehrfunktion [1+1+2 P]:** Bestimmen Sie, sofern existent, die Umkehrfunktion von:

a) $[0,\infty) \ni s \mapsto \dfrac{\sqrt{s}-4}{\sqrt{s}+1} \in \mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R}\backslash\{-4\} \ni t \mapsto \dfrac{t-2}{t+4} \in \mathbb{R}$.

c) $\left(\dfrac{2}{3},\infty\right) \ni u \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{4u+3}{3u-2}}\right) \in \mathbb{R}$.

4. **Allgemeine Potenz [1+1+1+1 P]:** Seien a, b, x und y reelle Zahlen und $a, b > 0$. Beweisen Sie:

a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, b) $\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$, c) $a^x \cdot b^x = (a\cdot b)^x$, d) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 07.01.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 10

Abgabe: bis 16.01.2009, 12 Uhr in/vor 1.302 (Öffnungszeiten: Mo-Do 8-15 Uhr, Fr 8-12 Uhr), RUD25.

---

1. **Rechnen mit komplexen Zahlen [1+1+1+1 P]:** Berechnen Sie

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1 \cdot \bar{z}_1, \quad z_1 \cdot \bar{z}_2, \quad z_2 \cdot \bar{z}_2$$

für die nachstehenden komplexen Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Stellen Sie die Resultate in der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

a) $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ und $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

b) $z_1 = 2 + 3\,\mathrm{i}$ und $z_2 = 3 - 5\,\mathrm{i}$.

c) $z_1 = 4 - 5\,\mathrm{i}$ und $z_2 = 4 + 5\,\mathrm{i}$.

d) $z_1 = \mathrm{i}$ und $z_2 = -2 - 4\,\mathrm{i}$.

2. **Arithmetische Form komplexer Zahlen [1+2+2 P]:** Bestimmen Sie die arithmetische Form der folgenden komplexen Zahlen:

a) $\dfrac{2}{1 - 3\,\mathrm{i}}$, b) $\dfrac{(2\,\mathrm{i} + 1)\,(\mathrm{i} - 2) + 1}{(2 - \mathrm{i})^2 - 2 + \mathrm{i}}$, c) $\left(3\,\mathrm{i} - \sqrt{3}\right)^4$.

3. **Gleichungen mit komplexen Zahlen [1+2+2 P]:** Bestimmen Sie alle Lösungen der nachstehenden Gleichungen. Berechnen Sie dabei jeweils Real- und Imaginärteil der Lösungen.

a) $z^3 = \mathrm{i}$, b) $z^2 = 3 - 4\,\mathrm{i}$, c) $|z| - z = 1 + 2\,\mathrm{i}$.

4. **Gauß'sche Zahlenebene [2+2+2 P]:** Beschreiben Sie die folgenden Mengen komplexer Zahlen als Punktmengen der Gauß'schen Zahlenebene (z.B. ist $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ die Peripherie des Kreises um $(0,0)$ mit Radius 1):

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 4\,\mathrm{i} - 3| \geq 3\}$.

b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| + \mathrm{Re}(z) = 1\}$.

c) $\left\{z \in \mathbb{C} : 5\,z \cdot \bar{z} + 18\,\mathrm{Im}(z) \leq 4\,\mathrm{Re}(z^2)\right\}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 14.01.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I

Serie 11

Abgabe: bis 23.01.2009, 12 Uhr in/vor 1.302 (Öffnungszeiten: Mo-Do 8-15 Uhr, Fr 8-12 Uhr), RUD25.

---

1. **Folgen komplexer Zahlen [1+1+2 P]:** Bestimmen Sie die Grenzwerte bzw. Häufungspunkte der nachstehenden Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen:

   a) $c_n = 1 + \mathrm{i}^n$.

   b) $c_n = \dfrac{1 + n^2\,(\mathrm{i} + 11\,n)}{1 - n^3\,\mathrm{i}}$.

   c) $c_n = \dfrac{1}{n} \cdot \exp\left(\dfrac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,n}{n_0}\right)$ mit $n_0 \in \mathbb{N}$.

2. **Teleskopreihe mit komplexen Gliedern [6 P]:** Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{\left(1 - z^k\right)\left(1 - z^{k+1}\right)}$$

   für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \neq 1$.

3. **Additionstheoreme für Sinus und Cosinus [2+2 P]:** Beweisen Sie, dass für beliebig gewählte $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Gleichungen gelten:

   a) $\sin\left(x + y\right) = \sin\left(x\right)\cos\left(y\right) + \cos\left(x\right)\sin\left(y\right)$.

   b) $\cos\left(x + y\right) = \cos\left(x\right)\cos\left(y\right) - \sin\left(x\right)\sin\left(y\right)$.

4. **Grenzwerte trigonometrischer Funktionen [1+2+3 P]:** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern diese existieren:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x \cdot \sin\left(1/x\right)\right)$.

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan\left(3\,x\right)}{\sin\left(2\,x\right)}$.

   c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(1 + \exp\left(\cot\left(x\right)\right)\right)^{-1}$ und $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1 + \exp\left(\cot\left(x\right)\right)\right)^{-1}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 21.01.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I

Serie 12

---

1. **Trigonometrische und exponentielle Form:** Bestimmen Sie den Betrag und das Argument für jede der nachstehenden komplexen Zahlen z. Geben Sie weiterhin z jeweils in trigonometrischer und exponentieller Form an.

   a) $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, b) $z = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$, c) $z = (1-\mathrm{i})^{13}$.

2. **Periodizität:** Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $M \subseteq \mathbb{R}$ für jeden der nachstehenden Ausdrücke $f(x)$. Für welche dieser Ausdrücke ist die Funktion

   $$\mathbb{R} \supseteq M \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

   periodisch, d.h. für welche $f(x)$ existiert ein $p \in \mathbb{R}$ (eine sog. Periode), so dass

   $$x + p \in M \wedge f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in M?$$

   Bestimmen Sie, falls Periodizität vorliegt, die kleinste Periode $p_0 \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie weiterhin jeweils, ob die Funktion nach oben bzw. nach unten beschränkt ist.

   a) $f(x) = -\exp(\cos(4x))$.
   b) $f(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{\cosh(x)}$.
   c) $f(x) = \cot^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + |\sin(x)|$.

3. **Ableitung von Sinus und Cosinus:** Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

   a) $\sin'(x) = \cos(x)$, b) $\cos'(x) = -\sin(x)$.

4. **Differenzierbarkeit:** Untersuchen Sie, an welchen Stellen die folgenden Funktionen stetig, differenzierbar bzw. stetig differenzierbar sind:

   a) $[0,\infty) \ni s \mapsto \sqrt{s} \in \mathbb{R}$.
   b) $\mathbb{R}\backslash\{0\} \ni t \mapsto t^{-2} \cdot (2\sin(t) + \cos(t)) \in \mathbb{R}$.
   c) $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$ mit $f(u) := \begin{cases} u \cdot \sin\left(\frac{1}{u}\right) & \text{falls } u \neq 0 \\ 0 & \text{falls } u = 0. \end{cases}$

   Geben Sie weiterhin jeweils, wo existent, die Ableitung an.

⚠ Ohne Abgabe. Zur Bearbeitung in den Übungen. ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 28.01.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I

Serie 13

---

1. **Differenziation trigonometrischer Funktionen:** In welchen Punkten ihres Definitionsbereichs sind die nachstehenden Funktionen differenzierbar (Begründung)? Bestimmen Sie dort jeweils ihre Ableitung.

   a) $\cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}$, b) $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, c) $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. **Höhere Ableitungen:** Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{N}$ die k-te Ableitung der folgenden Funktionen:

   a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto (a \cdot x + b)^l \in \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$.

   b) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x \cdot f(x) \in \mathbb{R}$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, einer k-mal differenzierbaren Funktion.

   c) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(-x) \cdot x^k \in \mathbb{R}$.

   Geben Sie das Ergebnis von c) in der Form $k! \cdot \exp(-x) \cdot L_k(x)$ an. Die Funktionen $L_k(x)$ nennt man die *Laguerre'schen Polynome*.

3. **Mittelwertsatz:** Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (bzw. mit dem Satz von Rolle) beweise man:

   a) Die Ableitung von $(x \cdot (x-1))^2$ besitzt wenigstens eine Nullstelle zwischen 0 und 1.

   b) Es gilt
   $$n \cdot x^{n-1} \geq \frac{x^n - y^n}{x - y} \geq n \cdot y^{n-1}$$
   für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > y > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

   c) Die Gleichung $x^n + p \cdot x + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ besitzt höchstens zwei reelle Lösungen für gerade n und höchstens drei reelle Lösungen für ungerade n.

4. **Regel von de l'Hospital:** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

   a) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$, b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\tan(2x)}$, c) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln\left(\frac{2 + 3\exp(x)}{5 + 7x}\right)$.

⚠ Ohne Abgabe. Zur Bearbeitung in den Übungen. ⚠