Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 1

Die Abgabe erfolgt vor Beginn Ihrer Übung im Zeitraum 26.10.2009 bis 29.10.2009.

1. (1+1+1+1 Punkte) Es seien p, q, r beliebige Aussagen. Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass

a) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$,

b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$,

c) $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$,

d) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$.

2. (2+2+2 Punkte) Beweisen Sie ohne Verwendung von Wahrheitstafeln für die (zweistelligen) Operationen Vereinigung und Durchschnitt von Mengen die folgenden Eigenschaften:

a) Kommutativität,

b) Assoziativität,

c) Distributivität.

3. (2+2+2 Punkte) Es seien A, B, C beliebige Mengen. Untersuchen Sie die nachstehenden Gleichungen und begründen Sie, welche dieser Aussagen wahr und welche falsch sind:

a) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$,

b) $A \cap (B \backslash C) = (A \cup B) \setminus (A \cap C)$,

c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

4. (4 Punkte) Ist die Gleichung

$$(A \times C) \setminus (B \times C) = (A \backslash B) \times C$$

für beliebige Mengen A, B, C erfüllt? Begründen Sie Ihre Aussage.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) diejenigen Aufgaben anzugeben, die Sie in Ihrer Übung vorrechnen möchten.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 2

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Übung in der Woche ab dem 2.11.2009.

1. (1+1+1+1 Punkte) Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen[1]. Welche der folgenden Teilmengen $G_n \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind Graph einer Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Welche dieser Funktionen f_n sind injektiv, welche surjektiv?

a) $G_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$,
b) $G_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x\}$,
c) $G_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^3\}$,
d) $G_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^3 = x\}$,

Begründen Sie Ihre Aussagen. Eine Skizze kann hilfreich sein.

2. (1+2+1+2 Punkte) Sei X eine Menge. Zeigen Sie:

a) Die Mengeninklusion "$\subseteq$" ist eine Relation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$.
b) Sie ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, d.h. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ist eine geordnete Menge.
e) Zeigen Sie, dass diese Ordnung im Allgemeinen nicht total ist.
d) Finden Sie ein Beispiel für X, so dass $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ total geordnet ist.

3. (2+2 Punkte) Seien X und Y zwei endliche Mengen. Zeigen Sie:

a) $|X| \leq |Y| \iff$ es existiert eine injektive Funktion $f : X \to Y$
b) $|X| \geq |Y| \iff$ es existiert eine surjektive Funktion $f : X \to Y$

Dabei bezeichne $|X|$ die Anzahl der Elemente von X.

4. (2+2+2 Punkte) Sei X eine nichtleere Menge, $\underline{2} := \{0, 1\}$ die Menge mit zwei Elementen und $\mathrm{Fkt}(X, \underline{2})$ die Menge der Funktionen $X \to \underline{2}$. In der Vorlesung haben Sie die charakteristische Funktion $\chi_A \in \mathrm{Fkt}(X, \underline{2})$ einer Teilmenge $A \subseteq X$ kennengelernt. Zeigen Sie:

a) $f : \mathcal{P}(X) \to \mathrm{Fkt}(X, \underline{2})\,,\ A \mapsto \chi_A$ definiert eine bijektive Funktion.
b) Nun seien X und Y zwei endliche Mengen. Wie viele Elemente hat dann die Menge $\mathrm{Fkt}(X, Y)$?
c) Wie viele Elemente hat $\mathcal{P}(X)$, falls X eine endliche Menge ist?

Begründen Sie Ihre Aussagen.
Bemerkung: Für beliebige Mengen X und Y schreibt man manchmal $Y^X := \mathrm{Fkt}(X, Y)$ und $2^X := \mathcal{P}(X)$. Die Motivation dafür folgt aus dieser Übung.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,
ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,
iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,
iv) diejenigen Aufgaben anzugeben, die Sie in Ihrer Übung vorrechnen möchten.

[1] $\mathbb{R}$ wird demnächst formal eingeführt. Diese Aufgabe sollte aber trotzdem schon jetzt lösbar sein.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 3

Die Abgabe erfolgt vor Beginn Ihrer Übung im Zeitraum 9.11.2009 bis 12.11.2009.

1. (2+2 Punkte) Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\ .$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\ .$

2. (2+2+3 Punkte) Für welche natürlichen Zahlen n gilt:

a) $2^n > 2n+1$?

b) $n! \geq 3^n$?

c) $6 \leq \dfrac{265n}{4n^2+121}$?

Beweisen Sie Ihre Aussage.

3. (2+2 Punkte)

a) Existieren zwei rationale Zahlen a, b derart, dass keine rationale Zahl c existiert, die

$$a < c < b$$

erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass jede nicht-leere, endliche Teilmenge der reellen Zahlen ein kleinstes und ein größtes Element besitzt.

4. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

a) Leiten Sie aus den Körperaxiomen der reellen Zahlen folgende Aussage her:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R},\ b, d \neq 0.$$

Zeigen Sie weiterhin, dass aus $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a, b, c, d > 0$ folgt, dass

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

Hierbei bezeichnet $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ den sogenannnten *Binomialkoeffizienten*.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der drei schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 4

Die Abgabe erfolgt vor Beginn Ihrer Übung im Zeitraum 16.11.2009 bis 19.11.2009.

1. (2+3 Punkte) Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ ein Infimum besitzt.

b) Zeigen Sie mit einem indirekten Beweis, dass $\mathbb{N}$ kein Supremum besitzt.

2. (2+3 Punkte) Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:

a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2 = \frac{n\,(2n+1)\,(2n-1)}{3}.$$

b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

3. (4+1 Punkte) Definieren Sie für die zwei-elementige Menge $\mathbb{F} := \{\nabla, \Delta\}$ zwei Verknüpfungen $\oplus$ und $\otimes$ derart, dass $(\mathbb{F}, \oplus, \otimes)$ ein Körper ist. Welches der zwei Elemente von $\mathbb{F}$ ist die Eins und welches die Null des von Ihnen definierten Körpers?

4. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

a) Beweisen Sie, dass

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \forall\, n, k \in \mathbb{N},\ n \geq k.$$

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der drei schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 5

Die Abgabe erfolgt vor Beginn Ihrer Übung im Zeitraum 23.11.2009 bis 26.11.2009.

1. (1+1+1+1+1+1 Punkte) Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so definiert man $\overline{z} := x - iy$ und $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$. Dabei heißt $\overline{z}$ die zu z *konjugierte komplexe Zahl*, und $|z|$ heißt *Betrag* von z. Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, b) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$, c) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, d) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$,

e) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, f) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$, falls $z \neq 0$.

2. (2+2+2 Punkte) Berechnen Sie

$$z + w, \qquad z - w, \qquad z \cdot w, \qquad \frac{z}{w}, \qquad z \cdot \overline{w}$$

für die nachstehenden komplexen Zahlen z, w. Stellen Sie die Resultate in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar.

a) $z = 2 + 3i,\ w = -6i$, b) $z = 4 - 5i,\ w = 5i$, c) $z = i,\ w = -4i$.

3. (2+2+2 Punkte) Welche der Mengen

$$G_1 := \big\{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : w^2 = z\big\},$$
$$G_2 := \big\{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : w = z^2\big\},$$
$$G_3 := \big\{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : w = z^3\big\}$$

sind Graphen einer Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$? Welche dieser Funktionen sind injektiv?

4. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

a) Beschreiben Sie die folgenden drei Mengen komplexer Zahlen als Punktmengen der Ebene (z.B. ist $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ die Einheitskreislinie):

$$\big\{z \in \mathbb{C} : |z + 4i - 3| \geq 3\big\}, \ \big\{z \in \mathbb{C} : |z| + \mathrm{Re}\,(z) = 1\big\}, \ \big\{z \in \mathbb{C} : 5z \cdot \overline{z} - 1 = 4\,\mathrm{Re}\,(z^2)\big\}.$$

Hierbei ist $\mathrm{Re}\,(z) := x$ und $\mathrm{Im}\,(z) := y$, falls $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass für je zwei reelle Zahlen t, s

$$\big(\cos t + i \sin t\big)\big(\cos s + i \sin s\big) = \cos(t + s) + i \sin(t + s)$$

gilt und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. (Die Funktionen Kosinus und Sinus werden zwar in der Vorlesung erst später eingeführt, dürfen hier aber als aus der Schule bekannt vorausgesetzt werden. Die Additionstheoreme dürfen ebenfalls als bekannt vorausgesetzt werden).

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der drei schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 6

Die Abgabe erfolgt vor Beginn Ihrer Übung im Zeitraum 30.11.2009 bis 03.12.2009.

1. (1+2+1 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen:

a) $z^2 (1 + \mathrm{i}) = 2z$,
b) $|z| = z \cdot \overline{z}$,
c) $z^2 - 2\mathrm{i}z + 8a = 0$, $a \in \mathbb{R}^+$.

2. (3+2 Punkte) Es sei X eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass die Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$,

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Metrik auf X definiert. Diese wird als *diskrete Metrik* bezeichnet. Bestimmen Sie im metrischen Raum (X, d) die offene Kugel

$$B(a, r) = \left\{ x \in X \,\middle|\, d(a, x) < r \right\}$$

um $a \in X$ mit Radius $r \in \mathbb{R}^+$.

3. (2+2+2 Punkte) Es sei $(\mathbb{R}, d)$ der metrische Raum *reelle Zahlengerade*, d.h.

$$d(x, y) := |x - y| .$$

Weiterhin seien die folgenden zwei positiven reellen Zahlen gegeben:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1000}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{1000000}.$$

Bestimmen Sie für jede der nachstehenden Nullfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürliche Zahlen n_1, n_2, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_i$ die Ungleichung $d(0, a_n) < \varepsilon_i$ gilt, d.h. $a_n \in B(0, \varepsilon_i)$.

a) $a_n = \dfrac{1}{n!}$, b) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, c) $a_n = \dfrac{1}{n^3 + 1}$.

4. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

Bestimmen Sie im metrischen Raum $\left(\mathbb{R}^3, d\right)$,

a) $d(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$,
b) $d(x, y) := \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|)$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$

die Einheitssphäre

$$S(0, 1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, d(0, x) = 1 \right\}$$

und skizzieren Sie diese. 0 bezeichnet hierbei den Koordinatenursprung $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der drei schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,
ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,
iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,
iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 7

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Übung in der Woche ab dem 7.12.2009.

1. (2+2+2+2 Punkte) Bestimmen Sie alle Grenzwerte und Häufungspunkte der folgenden Folgen[1] $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ im metrischen Raum (X, d):

a) $X := \mathbb{R}$, $\quad d(x,y) := |x-y|$ $\quad$, $x_n := \frac{1}{n}$

b) $X := \mathbb{R}$, $\quad d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad$, $x_n := \frac{1}{n}$

c) $X := \mathbb{R}$, $\quad d(x,y) := |x-y|$ $\quad$, $x_n := 1 + \frac{2}{n}$

d) $X := \mathbb{C}$, $\quad d(x,y) := |x-y|$ $\quad$, $x_n := \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

2. (2+3 Punkte) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine reelle Folge[2] mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Angenommen a_n konvergiert gegen $a > 0$. Dann hat die durch $b_n := (-1)^n \cdot a_n$ definierte Folge genau die Häufungspunkte $\{-a, a\}$.

b) Die Folge $b_n := (-1)^n \cdot a_n$ hat einen Grenzwert $\iff$ $a_n \to 0$.
In diesem Fall gilt auch $b_n \to 0$.

3. (2+3 Punkte)

a) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge, die gegen $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie:
Falls $z_n \in \mathbb{R}$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, ist auch $z \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie dass die Umkehrung falsch ist, d.h. konstruieren Sie ein Beispiel[3] für eine komplexe Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $z \in \mathbb{R}$ konvergiert, aber $z_n \in \mathbb{R}$ nur für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.

4. (Vortrag zu Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

Seien $a > 0$ und $x_0 > 0$ positive reelle Zahlen. Betrachten Sie die durch x_0 und die Formel

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Zeigen Sie: Für alle $n \geq 1$ gilt $x_n \geq \sqrt{a}$ und $x_{n+1} \leq x_n$.
Hinweis: Berechnen Sie $x_n^2 - a$ und $x_n - x_{n+1}$ mit Hilfe der Rekursionsformel.

b) Zeigen Sie: Aus der in a) bewiesenen Aussage folgt, dass $(x_n)_n$ einen Grenzwert $x \geq \sqrt{a}$ besitzt. Zeigen Sie ferner mit Hilfe der Rekursionsformel, dass sogar $x = \sqrt{a}$.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der drei schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

[1] d.h. geben Sie jeweils Kandidaten für Grenzwerte und Häufungspunkte an, zeigen Sie anhand der Definitionen, dass diese tatsächlich solche sind, und begründen Sie warum es keine weiteren gibt.
[2] d.h. eine Folge in $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $d(x,y) := |x-y|$.
[3] d.h. geben Sie ein solches Beispiel an und beweisen Sie, dass es die geforderten Eigenschaften erfüllt.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 8

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Übung in der Woche ab dem 14.12.2009.

1. (3+3 Punkte)

a) Die Teilfolgen (x_{2n}) und (x_{2n+1}) einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ seien konvergent. Muss dann (x_n) selbst auch konvergieren? (Beweisen Sie Ihre Antwort!)

b) Wie verhält es sich, wenn zusätzlich die Teilfolge (x_{3n}) konvergiert?

2. (2+4 Punkte)

a) Finden Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ die möglichen Grenzwerte der durch $x_n := \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ definierten reellen Zahlenfolge.

b) Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ mit $b \leq a$ werden rekursiv zwei Folgen durch

$$x_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2}, \qquad y_{n+1} := \sqrt{x_n y_n}$$

definiert, wobei $x_0 := a$ und $y_0 := b$ sei. Zeigen Sie, dass beide Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren und geben Sie diesen an.

3. (3+3 Punkte) Zeigen Sie:

a) Jede konvergente Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

b) Für zwei beschränkte reelle Folgen (x_n) und (y_n) gilt:

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(x_n) + \limsup_{n\to\infty}(y_n).$$

4. (Vortrag zu Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

a) Gilt für zwei Folgen (x_n) und (y_n) in $\mathbb{K}$, dass $x_n \to a$ und $y_n \to b$, so folgt $x_n y_n \to ab$.

b) Die durch $x_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ definierte reelle Folge ist konvergent. (Der Grenzwert wird *Eulersche Zahl* genannt. Verwenden Sie die Bernoulli-Ungleichung, um Monotonie nachzuweisen!)

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der drei schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Zusatzserie

Die Abgabe erfolgt vor Beginn Ihrer Übung im Zeitraum 04.01.2010 bis 07.01.2010.

---

1. (2* Punkte) Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k\, x^k = \frac{x}{x-1}\left(n\, x^n - \frac{x^n - 1}{x-1}\right).$$

2. (1*+1*+2* Punkte) Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x,$$

wobei e die Eulersche Zahl bezeichnet. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Tatsache den Grenzwert für jede der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\geq k}$, sofern dieser existiert (Begründung):

a) $a_n = \left(1 + (3\,n)^{-1}\right)^n$, $k = 1$.

b) $a_n = \left(1 - (n-2)^{-1}\right)^{n+5}$, $k = 3$.

c) $a_n = \left(3 - n^{-1/2}\right)\left(1 + 3\,n^{-1}\right)^n\left(6 + n^{-1000}\right)^{-1}\left(1 + n^{-1}\right)^{-87}\left(1 - n^{-1}\right)^{-n}$, $k = 2$.

3. (3* Punkte) Es seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ reelle Zahlen, die

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0$$

erfüllen. Hiermit sei über

$$b_k := \lambda_1\, a_{k+1} + \lambda_2\, a_{k+2} + \ldots + \lambda_n\, a_{k+n}$$

die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen definiert. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum b_k$ konvergent ist und ihr Wert durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \lambda_1\, a_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\, a_2 + \ldots + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1})\, a_{n-1}.$$

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der drei schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 9

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Übung in der Woche ab dem 4.1.2010.

1. (3+3 Punkte)

a) Zeigen Sie die Äquivalenz der Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_\infty$ auf $\mathbb{K}^m$, $m \geq 1$, wobei für $x \in \mathbb{K}^m$

$$||x||_1 := \sum_{i=1}^{m} |x_i|, \quad ||x||_\infty := \max_{1\leq i\leq m} |x_i|.$$

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}^m$ bezüglich einer der in a) angegebenen Normen vollständig ist und damit ein Banach-Raum.

2. (4+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz von $\sum a_k$ die Konvergenz von $\sum \frac{a_k}{2^k}$ folgt.

b) Konstruieren Sie ein Beispiel, so dass $\sum \frac{a_k}{2^k}$ konvergiert, aber $\sum a_k$ divergiert.

3. (2+2+2 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren in $\mathbb{R}$:

$$a) \sum \frac{k^2-2k+1}{k^3-k^2-2k} \quad b) \sum \frac{2^k}{k^k} \quad c) \sum \frac{k!k!}{(2k)!}.$$

4. (Vortrag zu Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

a) Seien $(X, ||\cdot||_X)$ und $(Y, ||\cdot||_Y)$ normierte Räume und $\mathcal{L}(X,Y)$ die Menge aller Abbildungen A mit den Eigenschaften

i) $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in X$

ii) $\forall A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\exists k \in \mathbb{K}$: $||Ax||_Y \leq k||x||_X$, $\forall x \in X$.

Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung eine Norm auf $\mathcal{L}(X,Y)$ ist

$$||A|| := \sup_{||x||_X=1} ||Ax||_Y.$$

b) Bestimmen Sie alle Werte von $x \in \mathbb{R}$, wofür die folgende Reihe konvergiert

$$\sum \frac{(-1)^k x^k}{(k+1)2^k}.$$

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der drei schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 10

Die Abgabe erfolgt vor Beginn Ihrer Übung im Zeitraum 11.01.2010 bis 14.01.2010.

---

1. (3+3 Punkte) Zeigen Sie: a) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$ hat den Konvergenzradius 0.

b) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ hat den Konvergenzradius 1.

2. (3+2+1 Punkte) a) Beweisen Sie den folgenden Satz: *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *eine Potenzreihe mit* $a_k \neq 0$ *für alle* k*, für welche*

$$\rho := \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *existiert. Dann ist* ρ *der Konvergenzradius von* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

b) Sei $m \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^m z^k$ hat den Konvergenzradius 1.

c) Begründen Sie: Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ (welche nach Teil b) den Konvergenzradius 1 hat), konvergiert für $z = -1$ und divergiert für $z = 1$. (Auf dem Rand des Konvergenzkreises kann also Konvergenz oder Divergenz vorliegen.)

3. (3+3 Punkte) Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ Potenzreihen mit dem Konvergenzradien ρ_a und ρ_b. Zeigen Sie:

a) Für den Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)z^k$ gilt $r \geq \min(\rho_a, \rho_b)$, und für die Werte dieser Reihe gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\,, \qquad \text{falls } |z| < \min(\rho_a, \rho_b).$$

b) Für den Konvergenzradius r des Cauchy-Produkts $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right)z^k$ gilt ebenfalls $r \geq \min(\rho_a, \rho_b)$, und für die Werte dieser Reihe gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) z^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)\,, \qquad \text{falls } |z| < \min(\rho_a, \rho_b).$$

4. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

a) Zeigen Sie, dass man durch Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ erreichen kann, dass ihr Wert sich ändert. (Den in der Vorlesung ohne Beweis erwähnten Satz, dass man sogar jeden Wert aus $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ erreichen kann, sollen Sie dabei aber natürlich nicht benutzen.) Dabei kann man z.B. wie folgt vorgehen: Man ordnet so um, dass aus der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$$

die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots$$

entsteht. Außerdem bildet man die Reihe $\sum \widetilde{y}_k$, die aus der umgeordneten Reihe $\sum y_k$ wie folgt durch Klammerungen entsteht:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{y}_k &= \left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right) - \frac{1}{16} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots\right)\end{aligned}$$

Es gilt also $\sum \widetilde{y}_k = \frac{1}{2}\sum x_k$. Ist s der Wert von $\sum x_k$, so folgt daraus, dass $\sum \widetilde{y}_k$ gegen $s/2$ konvergiert. Wegen $s \neq 0$ (man sieht z.B. leicht, dass $s \geq 1/2$ ist) genügt es daher zu zeigen, dass die Reihe $\sum y_k$ ebenfalls konvergiert, und zwar gegen den gleichen Wert wie $\sum \widetilde{y}_k$. Letzteres folgt durch Vergleichen der Partialsummen dieser Reihen $t_n := \sum_{k=0}^{n} y_k$ und $\widetilde{t}_n := \sum_{k=0}^{n} \widetilde{y}_k$. Es gilt nämlich für $m = 1, 2, 3, \dots$

$$t_{3m} = \widetilde{t}_{2m}, \qquad t_{3m-1} = \widetilde{t}_{2m-1} \qquad \text{und} \qquad t_{3m-2} = \widetilde{t}_{2m-1} + \frac{1}{4m-2}.$$

b) Beweisen Sie den Identitätssatz für Potenzreihen: *Sei $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ρ, für die eine Nullfolge komplexer Zahlen $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}^{\infty}$ existiert mit $0 < |y_j| < \rho$ und $a(y_j) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (y_j)^k = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Hinweise: 1. Schritt: Zeigen Sie zuerst, dass $a_0 = 0$ ist. Dabei können Sie z.B. wie folgt vorgehen: Zunächst folgt für alle $j \in \mathbb{N}$ aus $0 = a(y_j) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (y_j)^k$ die Abschätzung

$$|a_0| \leq \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k (y_j)^k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||y_j|^k.$$

Begründen Sie nun, dass man wegen $\rho > 0$ ein reelles $C > 0$ finden kann mit $|a_k| \leq C^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Danach argumentiert man wie folgt weiter:

Wegen $\lim y_j = 0$ existiert für jedes $0 < \varepsilon < 1$ ein $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|y_{j_\varepsilon}| < \varepsilon/C$. Setzt man dann in der obigen Abschätzung $j = j_\varepsilon$, so erhält man

$$|a_0| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||y_{j_\varepsilon}|^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} C^k \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \qquad \text{für alle } 0 < \varepsilon < 1,$$

also $a_0 = 0$.

2. Schritt: Begründen Sie, dass wegen $a_0 = 0$ nun auch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k$ die Voraussetzungen des Identitätssatzes erfüllt. Aufgrund der Überlegungen aus dem ersten Schritt muss dann auch $a_1 = 0$ gelten.

Danach derhält man mit Hilfe der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} z^k$, dass $a_2 = 0$ gelten muss, usw. (genauer: Beweis durch vollständige Induktion).

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der drei schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 11

Die Abgabe erfolgt vor Beginn Ihrer Übung im Zeitraum 18.01.2010 bis 21.01.2010.

1. (2+2+2 Punkte) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge mit den Gliedern

$$a_k := (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergent ist. Zeigen Sie weiterhin, dass das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst divergiert.

2. (2+2+2 Punkte) Gegeben seien die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^k.$$

Diese konvergieren absolut für $x \in (-1,1)$ gegen

$$\frac{1}{1-x} =: f(x), \qquad \frac{1}{1+x} =: g(x).$$

Bestimmen Sie die Potenzreihen, welche gegen die folgenden Funktionen konvergieren:

a) $(f+g) : (-1,1) \to \mathbb{R}$, b) $(f-g) : (-1,1) \to \mathbb{R}$, c) $(f \cdot g) : (-1,1) \to \mathbb{R}$.

3. (3+3 Punkte) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch die Zuordnung

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^4-10\,x^2+9}{x^2-4\,x+3} & \text{falls } x \neq 1 \wedge x \neq 3 \\ \alpha & \text{falls } x = 1 \\ \beta & \text{falls } x = 3. \end{cases}$$

Können $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, dass f stetig ist? Begründen Sie ihre Antwort.

4. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

Ist die Funktion $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

a) $f(x) := \sqrt{x}$,
b) $f(x) := x^2$

Lipschitz-stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der drei schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 12

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Übung in der Woche ab dem 25.01.2010.

1. (3+3 Punkte)

a) In welchen der folgenden Fälle ist die Teilmenge $U_i \subseteq X_i$ des metrischen Raumes (X_i, d_i) eine Umgebung des Punktes $x_i \in X_i$?

(i) $X_1 = \mathbb{R}$, $U_1 = [0, 2) \cup (5, \infty)$, $x_1 = 1$

(ii) $X_2 = \mathbb{C}$, $U_2 = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid 1 < x < 3 \wedge 1 \leq y \leq 3\}$, $x_2 = 2 + i$

(iii) $X_3 = \mathbb{C}$, $U_3 = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid 1 < x < 3 \wedge 1 \leq y \leq 3\}$, $x_3 = 2 + 2i$

b) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $U \subseteq X$ eine Umgebung von $x \in X$. Sei ferner $f : X \to Y$ eine Funktion und $g := f|_U : U \to Y$ die Einschränkung von f auf U. Zeigen Sie: f ist stetig in x genau dann wenn g stetig in x ist.

2. (4+2 Punkte)

a) In welchen der folgenden Fälle ist die Teilmenge $U_i \subseteq X_i$ des metrischen Raumes (X_i, d_i) kompakt?

(i) $X_1 = \mathbb{R}$, $U_1 = [0, 2] \cup [3, 7]$

(ii) $X_2 = \mathbb{R}$, $U_2 = [0, 1)$

(iii) $X_3 = \mathbb{R}$, $U_3 = [0, 4] \setminus [1, 2]$

(iv) $X_4 = \mathbb{C}$, $U_4 = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid 1 \leq x \leq 3 \wedge 1 \leq y \leq 3\}$

b) Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung, um zu zeigen: Es gibt keine bijektive und stetige Funktion $f : U_1 \to U_2$, wobei U_1 und U_2 wie in Teil a) seien.

3. (2+2+2 Punkte) Welche der folgenden Funktionen sind gleichmäßig stetig?

a) $f_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

b) $f_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \frac{1}{x^2}$

c) $f_3 : [0, \infty) \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \sqrt{x}$

4. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt. Zeigen Sie: Dann gilt sogar $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Schreiben und präsentieren Sie ein Gedicht über Stetigkeit.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der drei schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 13

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Übung in der Woche ab dem 01.02.2010.

1. (2+2+3 Punkte)

a) Ein Apfel fällt von einem Baum (ungehindert auf den Erdboden). Seine Höhe zum Zeitpunkt t lasse sich während des Falles durch die Formel $h(t) = h(t_0) - g\frac{1}{2}(t - t_0)^2$ berechnen ($g \in \mathbb{R},\ t_0$ sei der Zeitpunkt, zu dem sich der Apfel vom Baum löst). Ist die Funktion, die den Weg des Apfels beschreibt dann eine gleichmäßig stetige Funktion der Zeit? Geben Sie dazu vor allem ein mathematisches Modell an, in dem Sie rechnen und argumentieren!

b) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{\sin(x^2)}{x}$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Welche Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Werten aus einer beliebigen Menge X (versehen mit der diskreten Metrik) sind stetig?

2. (3+3 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass eine Lipschitz-stetige Funktion immer gleichmäßig stetig ist!

b) Zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{R}^+$ gleichmäßig stetige Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ nicht Lipschitz-stetig ist!

3. (5 Punkte)

Zeigen Sie: Der reelle Sinus ist Lipschitz-stetig.

4. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

a) Diskutieren Sie an geeigneten (einfachen) Beispielen, wie der Nachweis von Stetigkeit bei Verwendung verschiedener Methoden (etwa mithilfe ϵ-δ-Bedingung, Folgenstetigkeit, via Lipschitz-Stetigkeit) einfacher oder komplizierter werden kann.

b) Folgern Sie aus der Eulerschen Formel die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus ($z, w \in \mathbb{C}$):

$$\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w), \tag{1}$$
$$\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w). \tag{2}$$

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der drei schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis I (WS 09/10)

Serie 14

Ohne Abgabe. Zur Bearbeitung in Ihrer Übung im Zeitraum 01.02.2010 bis 11.02.2010.

1. (2 Punkte) Es seien $m \in \mathbb{N}^\times$ und $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{m}\right\}$. Zeigen Sie:

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+m^{2^k}x^{2^k}\right)=\frac{1-(mx)^{2^{n+1}}}{1-mx}\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

2. (2+2 Punkte) Es seien K ein angeordneter Körper und $a, b \in K$.

a) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

b) Zeigen Sie:

$$\inf\{a,b\}=\min\{a,b\}=\frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

3. (2+3 Punkte)

a) Skizzieren Sie in der Gauß'schen Ebene die folgende Punktmenge:

$$M:=\{z\in\mathbb{C}:|z+1|\le|z-\mathrm{i}|\le|z-1|\}.$$

b) Berechnen Sie $\overline{z}$, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$ für $z\in\left\{\frac{4+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}},\sqrt{\mathrm{i}}\right\}$, wobei hier verwendet wird, dass

$$\sqrt{z}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(|z|+\mathrm{Re}\,(z)\right)}+\mathrm{i}\,\mathrm{sign}\,(\mathrm{Im}(z))\sqrt{\frac{1}{2}\left(|z|-\mathrm{Re}\,(z)\right)}$$

für alle $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ gilt.

4. (2 Punkte) Prüfen Sie, ob die gegebene Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert, und berechnen Sie anhand der Definition des Grenzwerts einer Folge mittels Kugeln von (beliebigem) Radius $\epsilon>0$ gegebenenfalls den Grenzwert:

$$x_n=\frac{\sum_{k=1}^{n+1}k}{n+3}-\frac{3n}{2}\quad\text{für } n\in\mathbb{N}.$$

5. (2 Punkte) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum a_k x^k$ mit

$$a_k=\left(1+\frac{2}{k^3}\right)^k\quad\text{für } k\in\mathbb{N}^\times.$$

6. (3 Punkte) Es sei die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathbb{R}^2\ni(x,y)\mapsto\begin{cases}\frac{3xy}{4(x^2+y^2)} & \text{für } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Funktion ist stetig in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ und unstetig in $(0,0)$.

7. (Zusatzaufgabe) Eine punktförmige Schnecke kriecht auf einem 1m langen Gummiband mit einer konstanten Geschwindigkeit von 5cm/h. Am Ende der ersten und jeder weiteren Stunde wird das Band homogen um jeweils einen Meter gedehnt. Wird die Schnecke in endlicher Zeit das rechte Ende erreichen, wenn Sie zu Beginn der ersten Stunde am linken Ende startete?