Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 1. Übungsserie – Analysis III **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 28.10.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an09w/an.html

---

1. Man berechne das folgende Kurvenintegral:

$$\int_{\mathfrak{C}} (x + \sin y)\, dx + (y^2 + x \cos y)\, dy \qquad \text{,wobei } \mathfrak{C}$$

der Viertelbogen des Einheitskreises zwischen den Punkten $(1;0)$ und $(0;1)$ ist. (4)

2. Sei $\mathfrak{G}$ das Flächenstück bestehend aus den Punkten (x, y, z) mit $z = x^2 + y^2$ und $0 \leq z \leq 4$. Legen Sie für $\mathfrak{G}$ eine Orientierung fest und berechnen Sie folgendes Oberflächenintegral :

$$\int_{\mathfrak{G}} x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + (z-1)\, dx \wedge dy \qquad (6)$$

3. Bilden Sie die äußere Ableitung der folgenden Differentialform!

$$\omega = xy\, dx + x^2 y z^3\, dy + (x^2 + y^2)\, dz \qquad (3)$$

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 2. Übungsserie – Analysis III **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 9.11.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an09w/an.html

---

1. Gegeben sei der $\mathbb{R}^2$ mit Standardstruktur. Man berechne für Polarkoordinaten r, ϕ
   a) die Vektorfelder ∂_r , ∂_ϕ und den metrischen Tensor , (4)
   b) die kanonische Volumenform dV , (1)
   c) die $\sharp$-Bilder $\sharp dr$ und $\sharp d\phi$, (2)
   d) die dualen Ergänzungen ${}^*dr$ und ${}^*d\phi$, (4)
   e) den Laplace-Operator Δu für beliebige Funktionen $u(r, \phi)$ entsprechend der allgemeinen Vorschrift $\Delta = *d*d$. (6)

   (Polarkoordinaten: $x = r\,\cos\phi, \quad y = r\,\sin\phi \quad , \; 0 < \phi < 2\pi \quad r > 0$)

2. Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $\mathfrak{Y} = (x^3 - 3xy^2)\partial_x + (y^3 - 3x^2y)\partial_y + z\partial_z$. Man zeige, daß $\mathfrak{Y}$ konservativ ist (Gradientenfeld) und finde ein Potential U, so daß $\mathfrak{Y} = \mathfrak{grad}\ \mathrm{U}$ gilt! (3)

3. Gegeben sei eine Fläche $\mathfrak{G}$ bestehend aus den Punkten (x, y, z) mit $x^2 + y^2 = 16$ und $0 \leq z \leq 5$ und ein Vektorfeld $\mathfrak{X} = z\,\partial_x + x\,\partial_y - 3y^2 z\,\partial_z$. Man berechne den Fluss von $\mathfrak{X}$ durch den Teil von $\mathfrak{G}$, der im ersten Oktanten liegt. (6)

4. Man überprüfe, welche der folgenden Differentialformen geschlossen sind!

   a) $\omega = 3x^2 sin(yz)\,dx + x^3 zcos(yz)\,dy + x^3 ycos(yz)\,dz$ (2)

   b) $\omega = (y - z^2)\,dz \wedge dx + (2xy - z)\,dx \wedge dy$ (2)

   c) $\omega = xy^2\,dx + x^2 z\,dy + y^2 x^2\,dz$ (2)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 3. Übungsserie – Analysis III **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 16.11.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an09w/an.html

---

1. Sei $\mathfrak{G}$ das Flächenstück bestehend aus den Punkten (x, y, z) mit $z = x^2 + y^2$ und $0 \leq z \leq 9$. Man berechne folgendes Oberflächenintegral 2.Art:

$$\int_{\mathfrak{G}} xydy \wedge dz + yzdz \wedge dx + (y^2 - x^2)dx \wedge dy \tag{4}$$

2. Man berechne die Divergenz und Rotation des Feldes $\mathfrak{F}$, dessen Komponenten A, B, C in Kugelkoordinaten gegeben sind! (d.h. $\mathfrak{F} = A\,\partial_r + B\,\partial_\theta + C\,\partial_\phi$)
Man benutze die Ergebnisse der Vorlesung und benutze zur Berechnung von Divergenz und Rotation die Operatoren $\flat$, $\sharp$ und $*$.

$$\begin{aligned} A(r,\theta,\phi) &= (\tfrac{1}{r^2})cos\phi \\ B(r,\theta,\phi) &= rsin\theta \\ C(r,\theta,\phi) &= sin\theta cos\phi \end{aligned} \tag{10}$$

3. Durch einen Potenzreihenansatz bestimme man eine Lösung $y = y(t)$ der Differentialgleichung $y'' + y = 0$ mit $y(0) = 0$. (6)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 4. Übungsserie – Analysis III **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 23.11.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11w/an.html

---

1. Sei $\mathfrak{X}$ ein Vektorfeld, dessen Komponenten A, B, C in Kugelkoordinaten gegeben sind! (d.h. $\mathfrak{X} = A\,\partial_r + B\,\partial_\theta + C\,\partial_\phi$)
   a) Bestimmen Sie $\mathfrak{rot}\ \mathfrak{X}$! Ist $\mathfrak{X}$ wirbelfrei? (2)
   b)Falls $\mathfrak{X}$ konservativ ist, gebe man ein Potential für $\mathfrak{X}$ an! (1)
   c) Man gebe alle Funktionen $U(r,\theta,\phi)$ an, für die $\mathfrak{X}$=$\mathfrak{grad}\,U$ gilt.
   (Es ist nachzuweisen, daß es keine weiteren Lösungen gibt!) (3)

$$A(r,\theta,\phi) = 2r\cos\theta$$
$$B(r,\theta,\phi) = \sin\theta\left(\frac{2\sin\phi\cos\theta}{r^2} - 1\right)$$
$$C(r,\theta,\phi) = \frac{\cos\phi}{r^2}$$

2. Ein 100-Liter Tank sei mit Wasser gefüllt in dem 10kg Salz gelöst sind. Pro Minute fließen 4 Liter Wasser mit einem Salzgehalt von 40 g/l zu. Eine gleiche Menge Wasser fließe ab. (Die Lösung werde ständig durchmischt.)
   a) Man gebe die Konzentration zum Zeitpunkt t an! (4)
   b) Welche Konzentration stellt sich schließlich ein? (1)

3. Man bestimme die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$(1+t^2)\dot{x} + tx - tx^2 = 0 \qquad x(0) = 2 \qquad (4)$$

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 5. Übungsserie – Analysis III **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 30.11.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11w/an.html

---

1. Man bestimme die Wronski-Determinante für die folgenden Funktionen:
   a) $\sin^2 t, \quad 1 - \cos 2t$
   b) $t, \quad t \cdot \ln t$ (3)

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 4y \\ \dot{y} &= x + 2y \end{aligned}$$ (5)

3. Man bestimme die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen!

   a.) $x'' + 5x' + 4x = 0$ (2)
   b.) $x'' + x' - 2x = 0$ (2)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 6. Übungsserie – Analysis III **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 7.12.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11w/an.html

---

1. Man löse folgendes Anfangswertproblem:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} - 6t + 5 = 0 \qquad x(-1) = 1 \qquad \dot{x}(-1) = 2 \tag{6}$$

2. Man bestimme die allgemeine Lösung des folgenden DGL-Systems:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y + 4z \\ \dot{y} &= 3x + 2y - z \\ \dot{z} &= 2x + y - z \end{aligned} \tag{7}$$

3. Zeigen Sie: $\int x J_0(x) dx = x J_1(x) + C$ (2)

$$\int x^3 J_0(x) dx = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4x J_1(x) + C \tag{5}$$

(Hinweis: J_n ist die Besselfunktion n-ter Ordnung.)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 7. Übungsserie – Analysis III **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 14.12.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11w/an.html

---

1. Man bestimme die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen!

   a.) $x''' - 7x'' + 31x' - 25x = 0$ (3)

   b.) $x'' + x' - 2x = e^{3t}$ (5)

2. Gegeben sei der unitäre Raum $\bar{C}([0,1])$ mit dem üblichen Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 \bar{x}(t)y(t)dt \ .$$

   Es seien $x_1(t) = 2i - t^2, \quad x_2(t) = 1 + it$. Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle x_i, x_j\rangle$ für $i, j = 1, 2$ und den Abstand zwischen x_1 und x_2. (4)

3. Es sei X ein komplexer unitärer Raum und $\{e_1, ..., e_n\}$ ein ONS. Beweisen Sie, daß für jedes $x \in X$ und für beliebige komplexe Zahlen $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ gilt:

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^2 + \sum_{k=1}^{n} \mid \beta_k - a_k \mid^2 \ ,$$

   wobei $a_k = \langle e_k, x\rangle$ ist. (5)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 8. Übungsserie – Analysis III **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 4.1.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11w/an.html

---

1. Man bestimme die Lösung der DGL $3y'' + 4y' + y = (sint)e^{-t}$ für die Anfangswerte $y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0.$ (6)

2. Im unitären Raum $C([0,1])$ seien die Folgen

$$\begin{array}{ll} (a) & x_n(t) = nt^n(1-t), \quad t \in [0,1] \\ (b) & x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} sin(nt), \quad t \in [0,1] \end{array}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß diese Folgen im Mittel (also bzgl. der Norm) gegen die Null-Funktion ($x(t) \equiv 0$ auf $[0,1]$) konvergieren. (6)
Zeigen Sie darüberhinaus, daß die Konvergenz für die Folge (a) punktweise, aber nicht gleichmäßig, für die Folge (b) gleichmäßig ist! (4)

3. Gegeben sei der unitäre Raum $\bar{C}([-\pi,\pi])$ mit dem ONS $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \quad : k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.
Berechnen Sie die Fourierreihe der Funktion $x(t) = e^{iat}, \quad t \in [-\pi,\pi]$,
wobei a eine beliebig gewählte nicht ganzzahlige reelle Zahl ist. (5)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 9. Übungsserie – Analysis III **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 11.1.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11w/an.html

---

1. Gegeben sei der unitäre Raum $C([-\pi,\pi])$ mit dem üblichen Skalarprodukt. Berechnen Sie bezüglich des vollständigen ONS $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t,\quad \ldots\ \}$ die Fourierreihe der Funktion

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-\pi, 0] \\ t^2 & t \in [0, +\pi] \end{cases}. \qquad (6)$$

2. Drücken Sie die (eindim.) Fouriertransformierte der Funktionen
   a) $f(ax+b), \quad a > 0$ (3)
   b) $f(x)\sin(bx)$ (3)
   mit Hilfe der Fouriertransformierten von $f(x)$ aus.

3. Sei W der von den Funktionen $x_1(t) = 1,\ x_2(t) = t,\ x_3 = t^3$ aufgespannte Unterraum des reellen Hilbertraums $L_2([-1,+1])$. Berechnen Sie die orthogonale Projektion von $f(t) = e^t$ auf den Unterraum W! (4)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 10. Übungsserie – Analysis III **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 18.1.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11w/an.html

---

1. Zeigen Sie, daß im unitären Raum $C([0,l])$ mit $\langle x,y\rangle = \int_0^l x(t)\,y(t)dt$

   das System $\{\frac{1}{\sqrt{l}},\quad \sqrt{\frac{2}{l}}cos\frac{\pi t}{l},\quad \sqrt{\frac{2}{l}}cos\frac{2\pi t}{l},\quad \ldots\quad\}$

   a) ein Orthonormalsystem ist. (3)
   b) vollständig ist. (4)
   (Hinweis zu b): Man setze Funktionen $x \in C([0,l])$ gerade auf $[-l,0]$ fort und transformiere das Intervall $[-l,l]$ auf das Intervall $[-\pi,\pi]$.)

2. Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ einer im Koordinatenursprung befindlichen elektrischen Ladung der Stärke Q sei in Kugelkoordinaten gegeben durch $\mathfrak{E} = \frac{Q}{r^2}\partial_r$. Das Feld $\mathfrak{E}$ besitzt ein mit Ausnahme des Ursprungs überall definiertes Potential U ($\mathfrak{E} = -\mathfrak{grad}$ U und U im Unendlichen Null).
   a) Bestimmen Sie das Potential U ! (3)
   (Hinweis: Stellen Sie $\mathfrak{grad}$ U in Kugelkoordinaten dar.)

   b) Zeigen Sie, dass U harmonisch ist. (2)

3. Berechnen Sie unter Benutzung der Kirchhoffschen Formel die Lösung des AWP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1,x_2,x_3,t) - 8\Delta u(x_1,x_2,x_3,t) = t^2x_1^2, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0$$

$$u(x_1,x_2,x_3,0) = x_2^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,x_2,x_3,0) = x_3 \qquad (9)$$

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 11. Übungsserie – Analysis III **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 25.1.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11w/an.html

---

1. Auf dem Intervall $[0, \pi]$ sei die Funktion $f(t)$ gegeben. (7)
   Geben Sie bzgl. des folgenden Orthogonalsystems $\{1, \cos t, \cos 2t, \ldots \}$ die Fourierreihe von $f(t)$ an!

$$f(t) = \begin{cases} t & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - t & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}.$$

2. Gegeben sei das DifferentialGleichungsSystem: (9)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 12y + 48e^t \\ \dot{y} &= 3x + y + 120e^{7t}. \end{aligned}$$

   a)Man bestimme die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems.
   b)Durch Variation der Konstanten ermittle man eine spezielle Lösung des gegebenen DGL-Systems.
   c)Geben Sie eine Lösung mit $x(0) = -10$ und $y(0) = -5$ an.

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 12. Übungsserie – Analysis III **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 1.2.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11w/an.html

---

1. Sei $\Omega = (0,3) \times (0,4)$, $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i$, wobei $\Gamma_1, ..., \Gamma_4$ die vier Randseiten des Rechtecks Ω seien. Γ_1 sei die Seite auf der x_1-Achse, Γ_4 die Seite auf der x_2-Achse.

   Lösen Sie das Problem
   $$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 && x \in \Omega \\ u(x) &= 0 && x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \\ u(x_1, 0) &= x_1(3 - x_1)^2 && x_1 \in [0,3] \\ u(0, x_2) &= x_2(4 - x_2) && x_2 \in [0,4] \end{aligned}$$

   mit Hilfe der Fouriermethode. (10)

2. Seien Ω und Γ wie in Aufgabe 1.

   a.) Bestimmen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenfunktionen des Problems
   $$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda u(x) && x \in \Omega \\ u(x) &= 0 && x \in \Gamma \end{aligned}$$ (6)

   b.) Lösen Sie das Problem
   $$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 1 && x \in \Omega \\ u(x) &= 0 && x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \\ u(x_1, 0) &= x_1(3 - x_1)^2 && x_1 \in [0,3] \\ u(0, x_2) &= x_2(4 - x_2) && x_2 \in [0,4]. \end{aligned}$$ (6)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 13. Übungsserie – Analysis III **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 8.2.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11w/an.html

1. Zeigen Sie, daß der durch das Randwertproblem

$$-[(1-x^2)y'(x)]' + \tfrac{m^2}{1-x^2}y(x) = f(x)$$

$$x \in (-1,1), \quad |\, y(-1)\,|, |\, y(1)\,| < \infty$$

erzeugte Operator L: $C([-1,1]) \longmapsto C([-1,1])$ symmetrisch ist. (4)

2. Untersuchen Sie folgendes RWP:

$$-u''(x) - u(x) = f(x) \qquad , x \in [0,1]$$

$$u(0) = 0 \quad , u'(1) = 0$$

a) Zeigen Sie, daß der durch dieses RWP erzeugte Operator injektiv ist. (3)
b) Berechnen Sie die Greensche Funktion des RWP. (3)
c) Lösen Sie das RWP für $f(x) = x$ unter Benutzung der Greenschen Funktion. (3)
d) Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen des RWP. (4)
e) Lösen Sie das RWP für $f(x) = x$ durch Entwicklung nach den EF des RWP. (2)

3. Die freien Schwingungen einer hängenden Saite der Länge l unter der Wirkung ihres Eigengewichtes werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\rho\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \rho g\tfrac{\partial}{\partial x}[x\tfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)] = 0, \qquad x \in (0,1),$$

$$u(0,t) \text{ endlich}, \; u(l,t) = 0$$

(Dichte $\rho = const > 0$, Schwerebeschleunigung $g = const > 0$).

a) Zeigen Sie, daß sich die Amplituden und Frequenzen der Eigenschwingungen $u(x,t) = X(x)\exp(i\omega t)$ aus folgendem EWP bestimmen:

$$-[xX'(x)]' = \lambda X(x), \quad x \in (0,l), \quad \lambda = \tfrac{\omega^2}{g},$$

$$X(0) \text{ endlich}, \quad X(l) = 0. \qquad (5)$$

b)Berechnen Sie alle EW und EF.
(Hinweis: Man substituiere $X(x) = Y(y), \quad y = 2\sqrt{\lambda x}$.) (6)