Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 1. Übungsserie – Analysis I **

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: 2.11.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Man beweise durch vollständige Induktion:

   a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar. (3)

   b) Für alle natürlichen Zahlen $n > 3$ gilt: $2^n + 1 > n^2$. (3)

2. Man bestimme die Menge der reellen Zahlen x, die die Ungleichung

   a) $\frac{3x+2}{2x+3} > x + 1$ b) $\frac{2x+1}{3x-3} > \frac{3x-3}{2x+1}$ c) $\frac{2}{x+1} > \frac{1}{x-2}$ (9)

   erfüllen!

3. Für jede positive reelle Zahl p bestimme man alle reellen Lösungen x der Gleichung

   $$\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = x \qquad (4)$$

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 2. Übungsserie – Analysis I **

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: 9.11.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Untersuchen Sie, für welche natürlichen Zahlen n gilt:

   a) $2^n < n!$ b) $n^n > 5n!$ c) $2^n < n^3$

   Beweisen Sie Ihre gefundenen Ergebnisse! (9)

2. Für welche reellen Zahlen sind folgende Ungleichungen erfüllt?

   a) $\frac{1}{1-x} < 1 - \frac{|x|}{2}$ (3)

   b) $| 1 + x | < \frac{1}{1-x}$ (3)

   c) $\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2$ p feste positive reelle Zahl (3)

3. Bilden Sie $M \cap N$, $M \cup N$, $M \setminus N$ und $N \setminus M$ für folgende Mengen reeller Zahlen:

   $M = \{x \in \mathbb{R} : \quad | x - 1 | > | 2x + 3 | \quad \}$

   $N = \{x \in \mathbb{R} : \quad | 2x + 3 | < | 4x - 7 | \quad \}$ (6)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 3. Übungsserie – Analysis I **

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: 16.11.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Untersuchen Sie folgende Mengen reeller Zahlen auf Beschränktheit und geben Sie, falls vorhanden, das größte und das kleinste Element, Supremum und Infimum an!

   (a) $M = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 6x < 9\}$ (3)

   (b) $M = \{x \in \mathbf{R} :\mid x+1 \mid + \mid x-1 \mid = 5\}$ (3)

   (c) $M = \{x \in \mathbf{R} : \frac{(x^2-x+1)}{2x-3} \geq 1\}$ (3)

2. Man gebe für die Radien $r_1 = \frac{1}{1000}$ und $r_2 = \frac{1}{1000000}$ natürliche Zahlen n_1 und n_2 an, so

   daß für $n \geq n_k \quad \mid a_n - 0 \mid < r_k \quad$ gilt! ($k = 1, 2$)

   (a) $a_n = \frac{1}{n!}$ (2)

   (b) $a_n = \frac{1}{10^n}$ (2)

   (c) $a_n = \frac{1}{n^3+1}$ (2)

3. Welche der folgenden Zahlenfolgen sind konvergent? Man gebe die Grenzwerte der konvergenten Folgen an!

   (a) $a_n = \frac{4n^3-5n^2+1}{5n^3+3n-100}$ (2)

   (b) $a_n = \frac{n+5}{2+\sqrt{n}}$ (2)

   (c) $a_n = sin(\frac{n\pi}{4})$ (2)

   (d) $a_n = \frac{1}{n} sin(nr)$ $\quad r$ beliebige reelle Zahl (2)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 4. Übungsserie – Analysis I **

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: 23.11.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv wie folgt definiert:

   $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$ und $a_0 = \sqrt{3}$.

   Man beweise durch vollständige Induktion:

   a) Die Folge ist nach oben durch $(1+\sqrt{3})$ und nach unten durch $\frac{1}{2}$ beschränkt. (3)
   b) Die Folge ist monton wachsend. (3)
   c) Wegen a) und b) ist die Folge konvergent. Man berechne den Grenzwert. (1)

2. Man berechne die Summe (d.h. Grenzwert) der Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$. (4)

3. Man beweise durch vollständige Induktion:

   Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gilt: $(\frac{n}{3})^n \leq \frac{1}{3}n!$. (4)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 5. Übungsserie – Analysis I **

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: 30.11.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Welche der folgenden Reihen sind konvergent bzw. divergent?

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000}(\frac{1}{2})^n$ (3)

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{100^n}$ (3)

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$ (3)

2. Für welche positiven Werte $a \in \mathbf{R}$ läst sich die Konvergenz der folgenden Reihen mittels des Quotientenkriteriums nachweisen?

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ (2)

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 a^n}{(2n)!}$ (3)

3. Für welche reellen Zahlen q ist die folgende Reihe konvergent? (Nachweis!)

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n/(1-q^n)$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{2n}/(2n)!$ (6)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 6. Übungsserie – Analysis I **

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: 7.12.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Berechnen Sie die ersten vier Glieder der Partialsummenfolge. Stellen Sie eine Formel für die n-te Partialsumme der Reihe auf und beweisen Sie diese Formel. Zeigen Sie, dass die Reihen konvergieren und berechnen Sie die Grenzwerte!

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{k(k+1)}$ (4)

   (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4k-1}{2k(2k-1)}-\frac{4k+1}{2k(2k+1)}\right)$ (5)

2. Man berechne die Funktionswerte an den Stellen $x = 0.7$,$x = 1.4$ und $x = -0.8$ mit Hilfe des Hornerschemas für die Polynome $p(x)$ mit

   a) $p(x) = x^6 - 7x^5 + 5$ (2)

   b) $p(x) = 2x^7 - 6x^5 + x^2 + 6$ (2)

3. Man bestimme die Vielfachheit der Nullstelle $x = 1$ in $p(x)$!

   a) $p(x) = x^6 - 7x^5 + 20x^4 - 30x^3 + 25x^2 - 11x + 2$ (2)

   b) $p(x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6$ (2)

   c) $p(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 6x^2 + x - 3$ (2)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 7. Übungsserie – Analysis I **

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: 14.12.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Man berechne das Cauchy-Produkt der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{2n+1}/(2n+1)! \qquad \text{und} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{2n}/(2n)! \qquad . \tag{4}$$

2. Man gebe für die Funktionen a) $sinh(x)$ und b) $cosh(x)$ jeweils eine Potenzreihendarstellung an und bestimme die Konvergenzradien!
(Hinweis: Man benutze die Reihendarstellung von $exp(x)$.) (4)

3. Für jede natürliche Zahl n ist $F_n(x)$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ definiert. Man berechne $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ für $x \in [0,1]$!

a) $F_n(x) = \frac{1}{1+nx}$

b) $F_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$

c) $F_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

In welchen Fällen ist die Konvergenz gleichmäßig? (6)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 8. Übungsserie – Analysis I **

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: 21.12.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Man zeige, daß die folgenden Funktionenreihen gleichmäßig konvergent sind!

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} sin^2(nx)$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n cos^n(\frac{x}{n})$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} exp(-nx^2)$ (6)

2. Man berechne die Ableitung der folgenden Funktionen mit Hilfe der Kettenregel!

a) $f(x) = sin(1 - x^3)$ b) $f(x) = xe^{cos(x^2)}$

c) $f(x) = (sinx - cosx)^4$ (6)

3. Ermitteln Sie die Monotoniebögen der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 20$

b) $f(x) = sin^2 x$ (6)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

* * 9. Übungsserie – Analysis I * *

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: 11.1.2013**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Man berechne die 43.Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 e^x$. (4)

2. Entwickeln Sie mit Hilfe des Taylorschen Satzes das folgende Polynom
   $p(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x + 9$ um den Punkt $x_0 = 2$! (4)

3. Man berechne mit Hilfe der Regel von L'Hospital die folgenden Grenzwerte!

   a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2+x-12}{x^2+4x-21}$ (2)

   b) $\lim\limits_{x \to \infty} (x)^{\frac{1}{x}}$ (2)

   c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{1 - cos x}$ (3)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

* * 10. Übungsserie – Analysis I * *

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: 18.1.2013**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Ermitteln Sie die ersten drei von Null verschiedenen Glieder der MacLaurin-Reihe von $f(x) = tan(x)$! (5)

2. Man bestimme alle partiellen Ableitungen 1.Ordnung der folgenden Funktionen:

   a) $f(x,y) = 5x - 2xy^4 + 9y$ (2)

   b) $f(x,y) = sin(e^{xy} + x^3y)$ (2)

   c) $f(x,y,z) = z^4 ln(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2})$ (3)

3. Eine kreisförmige Scheibe Brot ist mit einem Stück Schweizer Emmentaler (mit Löchern) beliebig belegt. Ist es möglich, mit einem geraden Schnitt Brot und Käse gleichzeitig zu halbieren? (3)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

* * 11. Übungsserie – Analysis I * *

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: 25.1.2013**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert!

$lim_{x\to 0} \frac{5xsinx}{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}$ (6)

2. Man berechne alle partiellen Ableitungen 1. und 2.Ordnung!

a) $f(x,y) = x^4 + \sin y + y\cos x$ (3)

b) $f(x,y) = y^x$ (5)

3. Ermitteln Sie die inneren, isolierten, Rand- und Häufungspunkte der Mengen M, wobei

(a) $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ 1 < x^2 + y^2 < 2 \ \}$

(b) $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \mid x \mid + \mid y \mid \leq 1 \ \}$

(c) $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ (x^2+y^2)\cdot(1-x-y) = 0 \ \}$ ist! (6)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 12. Übungsserie – Analysis I **

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: 1.2.2013**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen!

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ke^{-k}$ (3) b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k}$ (5)

2. Ein Ingenieur hat den Auftrag, diverse zylindrische Konservendosen zu entwerfen. Dabei ist gefordert, daß bei vorgegebenem Fassungsvermögen möglichst wenig Material für die Herstellung der Dosen benötigt wird. In welchem Verhältnis müssen jeweils Höhe und Grundkreisradius der Dose (des Zylinders) zueinander stehen? (6)

3. Bilden Sie das Differential von $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + y^4$! Welchen Wert hat das Differential df für den Vektor $(-1,1)$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (4,2)$? (4)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 13. Übungsserie – Analysis I **

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: 8.2.2012**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die durch $z = f(x, y)$ im $\mathbf{R}^3$ gegebene Fläche im Punkt $(2, 1, 9)$, wobei $f(x, y) = 2x^2 - xy + 3y^2$ ist! (3)

2. Gegeben sei die Fläche mit der Gleichung

   $$z = 89x^2 - 96xy + 61y^2 - 260x + 70y + C \qquad .$$

   Wie muß die Konstante C gewählt werden, damit die obige Fläche die $x - y -$ *Ebene* berührt? (5)

3. Man bestimme Lage und Art der relativen Extremwerte der Funktion $f(x, y)$ und gebe die zugehörigen Funktionswerte an.

   $$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x + 5y \qquad (6)$$

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 14. Übungsserie – Analysis I **

Vorlesung: PD Dr. Tuschik **Abgabetermin: ———**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an12w/an.html

---

1. Ist die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n^2-n)3^{2n+1}x^{n+1}$ für $x = 0.1111$ konvergent?
   Falls Konvergenz vorliegt, berechne man für $x = 0.1111$ den exakten Wert der Reihe. (8)

2. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert!

   $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^4}-1}{(1-\cos x)^2}$ (7)

3. Die Funktion $f(x) = x^2\ln x - x$ ist für $x > 0$ beliebig oft stetig differenzierbar.

   a) Berechnen Sie die n-te Ableitung von $f(x)$ und beweisen Sie die von Ihnen gefundene Formel durch vollständige Induktion !
   b) Geben Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um $x_0 = 3$ an!
   c) Bestimmen Sie das offene Konvergenzintervall dieser Taylorreihe!
   d) Geben Sie das Restglied R_{20} in der Cauchyschen Form an! (10)

4. Gegeben sei die für alle $x > 0$ definierte Funktion $f(x) = \frac{(1-e^{-x})}{x^3e^{-x}}$.
   a) Zeigen Sie, dass $f(x)$ genau einen Extremwert hat.
   b) Bestimmen Sie die Art des Extremwerts (Maximum oder Minimum). (9)