HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 21.10.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 1

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 28.10.-03.11.2013

---

1. **Euler-Cauchysches Polygonenzugverfahren [5 P]:** Vorgelegt sei das Anfangswertproblem

$$\left(x' = t^2 + x\,,\,(0,1)\right).$$

Verifizieren Sie, dass es von

$$\overline{x} : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \overline{x}(t) = 3\exp(t) - t^2 - 2t - 2$$

gelöst wird und bestimmen Sie unter Anwendung des Euler-Cauchyschen Polygonenzugverfahrens mit Schrittweite 1/5 einen Näherungswert für $\overline{x}(1)$.

2. **Runge-Kutta-Verfahren [5 P]:** Berechnen Sie die Runge-Kutta-Näherungswerte x_1, x_2 für die Lösung der Anfangswertproblems $\left(x' = x^2 - t^2\,,\,(0,1)\right)$ an den Stellen $t_1 = 1/10$, $t_2 = 1/5$.

3. **Eindeutigkeit der Lösung [3 P]:** Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\left(x' = \sqrt{|x|}\,,\,(0,0)\right)$$

Zeigen Sie, dass sowohl

$$x_1 : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x_1(t) = 0,$$

als auch

$$x_2 : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x_2(t) = \frac{t^2}{4}$$

eine Lösung ist. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Picard-Lindelöf?

4. **Der Satz von Picard-Lindelöf [7 P]:** Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\left(x' = t^2 + tx^2\,,\,(0,0)\right)$$

und das Rechteck $R = [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$. Prüfen Sie zunächst, ob der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar ist. Bestimmen Sie dann das Intervall I und berechnen Sie, ausgehend von $\varphi_0 : I \ni t \mapsto 0 \in \mathbb{R}$, die ersten drei sukzessiven Approximationen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ der eindeutig bestimmten Lösung des vorstehenden Anfangswertproblems.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 28.10.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 2

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 04.11.-10.11.2013

---

1. **U-Boot vs. Zerstörer [5 P]:** Der Kommandant eines Zerstörers entdeckt in fünf Seemeilen Entfernung ein feindliches U-Boot, das sofort wegtaucht. Er fährt dann vier Seemeilen mit maximaler Geschwindigkeit geradlinig auf den Tauchpunkt zu, stellt dabei eilig eine Differentialgleichung für den Verfolgungsweg auf, der ihn mit Sicherheit genau über das U-Boot bringen wird, und löst sie. Dabei trifft er die Annahme, dass der Gegner geradlinig und mit maximaler Geschwindigkeit zu entfliehen versucht, wissend, dass diese ein Viertel der maximalen Geschwindigkeit des Zerstörers beträgt. Welchen Weg schlägt der Kommandant, eine Seemeile vom Tauchpunkt entfernt, ein?

2. **Lösungstechniken [5 P]:** Bestimmen Sie *die Lösung* des folgenden Anfangswertproblems auf dem Intervall [-1,1], sofern diese existiert:

$$\left((1+t^2)x' + 7tx - tx^2 = 0, \left(0, \frac{7}{3}\right)\right).$$

3. **Shisharauch [5 P]:** In einem Zimmer (20m^2 Grundfläche, $2,5$m Höhe) sitzen vier Personen und beginnen abwechselnd eine Shisha zu rauchen. Jeder Rauchende stößt mit einer Rate von drei Litern pro Minute ein Luftgemisch aus, das sechs Volumenprozent Kohlenmonoxid enthält. Diese Luft ist zu jedem Zeitpunkt perfekt mit der Raumluft vermischt, welche mit der Ausstoßrate des Rauchenden aus dem Raum abzieht. Dies sichert, dass stets das gleiche Volumen an Luft im Raum verbleibt; diese enthält zu Beginn noch kein Kohlenmonoxid. In welcher Minute wird im Raum eine (toxische) Kohlenmonoxidkonzentration von $0,012$ Volumenprozent überschritten?

4. **Analytische Lösungen [5 P]:** Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes *eine Lösung* des folgenden Anfangswertproblems auf $\mathbb{R}$:

$$\left(x'' - x = 0, (0,0)\right).$$

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 04.11.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 3

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 11.11.-17.11.2013

---

1. **Werbung [4 P]:** Vidale und Wolfe haben in Operations Research **5** (1957), 370-381 das folgende Differentialgleichungsmodell für die Verkaufsrate S eines gegebenen Produkts unter der Wirkung einer konstanten Rate A der Aufwendungen für die Werbung angegeben:

$$S' = rA\frac{M-S}{M} - \lambda S.$$

Hierbei ist λ die Verkaufszerfallskonstante, M das Sättigungsniveau bei der Werbungsrate A und r ein Maß für die Wirkung der Werbung. Lösen Sie die Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $S(0) = S_0$.

2. **Lokale Flüsse [8 P]:** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x' = f(x),$$

wobei $f : (0,\infty) \ni x \mapsto x - x^2 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Phasenportrait Φ dieser Differentialgleichung, also den zum Vektorfeld $V = f$ zugehörigen lokalen Fluss. Ist Φ ein (globaler) Fluss? Bestimmen Sie alle Fixpunkte von Φ.

3. **Globale Integrierbarkeit [4 P]:** Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$V(x_1, x_2) = \left(\sqrt[3]{x_1^2 + 7x_2^2}, x_1\right)$$

global integrierbar ist.

4. **Erweitertes Phasenfeld [4 P]:** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^{(5)} = 7\sin\left(t^2 x'''\right) - \frac{t}{1 + (x'' - x')^2}.$$

Bestimmen Sie das erweiterte Phasenfeld dieser Differentialgleichung. Für welche Anfangsbedingungen besitzt diese Differentialgleichung folglich eine Lösung? Sind diese Lösungen jeweils eindeutig bestimmt?

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 11.11.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 4

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 18.11.-24.11.2013

---

1. **Eine lineare Differentialgleichung [2 P]:** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x'' + x = 0.$$

Führen Sie diese in ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung über. Wie lautet folglich die allgemeine Lösung von $x'' + x = 0$?

2. **Wronski-Determinante [2+2 P]:** Bestimmen Sie die Wronski-Determinante von $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$, wobei

   a) $f_1(t) = \sin^2(t)$, $f_2(t) = 1 - \cos(2t)$.

   b) $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t\ln(t)$.

3. **Ein lineares Differentialgleichungssystem [5+2+2+5 P]:** Gegeben sei das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$x' = Ax + b(t), \quad A = \begin{pmatrix} -1/3 & 3 \\ 3 & -1/3 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   a) Bestimmen Sie zunächst direkt, d.h. ohne die Eigenwerte und Eigenvektoren von A bzw. At zu bestimmen, das Matrixexponential $\exp(At)$, $t \in \mathbb{R}$.

   b) Bestimmen Sie dann, unter Verwendung der Ergebnisse aus a), die allgemeine Lösung von

$$x' = Ax,$$

   und geben Sie eine Fundamentalmatrix $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dieses Differentialgleichungssystems an.

   c) Untersuchen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $\Phi(t)$ invertierbar ist.

   d) Bestimmen Sie schließlich, mit Hilfe der sogenannten Methode der Variation der Konstanten (Satz 10 der Vorlesung), eine Lösung von $x' = Ax + b(t)$. Wie lautet folglich die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems?

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 18.11.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 5

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 25.11.-01.12.2013

---

1. **Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten [4 P]:** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + 4x_2, \\ x_2' &= x_1 + 2x_2. \end{aligned}$$

2. **Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten [2+2 P]:** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

   a) $x'' + 5x' + 4x = 0.$

   b) $x'' + x' - 2x = 0.$

3. **Ein Anfangswertproblem [6 P]:** Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$x''' + 2x' - 7t + 3 = 0, \quad x(0) = \frac{7}{2}, \quad x'(0) = \frac{1}{2}, \quad x''(0) = \frac{5}{2}.$$

4. **Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten II [6 P]:** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + 4x_3, \\ x_2' &= 3x_1 - 3x_2 - x_3, \\ x_3' &= 2x_1 + x_2 - x_3. \end{aligned}$$

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 25.11.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 6

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 02.12.-08.12.2013

---

1. **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung [5 P]:** Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum und $\|\cdot\|$ die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm auf V. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \leq \|x\|\|y\|.$$

2. **Abstand von Funktionen [5 P]:** Gegeben sei der unitäre Raum $\left(\bar{C}([0,1]), \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ der stetigen, auf $[0,1]$ definierten, komplexwertigen Funktionen versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 \bar{x}(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

Weiterhin seien $x_1, x_2 \in \bar{C}([0,1])$ mit $x_1(t) = 7\mathrm{i} - t^2$, $x_2(t) = 3 + \mathrm{i}\sqrt{t}$. Berechnen Sie alle Skalarprodukte $\langle x_i, x_j\rangle$, $i, j \in \{1,2\}$ und bestimmen Sie den Abstand zwischen x_1 und x_2.

3. **Ein Hilbertraum [5 P]:** Gegeben sei der unitäre Raum $\left(\bar{l}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$, wobei

$$\bar{l}^2 = \left\{(a_k)_{k\in\mathbb{N}} : a_k \in \mathbb{C} \wedge \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty\right\},$$

$$\langle (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k b_k.$$

Zeigen Sie, dass $\left(\bar{l}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ vollständig ist.

4. **Grenzwertsätze [5 P]:** Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen aus V. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle = \left\langle \lim_{k\to\infty} x_k, \lim_{k\to\infty} y_k \right\rangle, \quad \lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \left\| \lim_{k\to\infty} x_k \right\|.$$

Auch hier bezeichnet $\|\cdot\|$ die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm auf V.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 02.12.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 7

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 09.12.-15.12.2013

---

1. **Drei Konvergenzbegriffe [5 P]:** Gegeben sei der unitäre Raum $\bar{C}([0,1])$ und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \bar{C}([0,1])$,
$$x_n(t) = (n-1)\,t^n(1-t).$$
Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in \bar{C}([0,1])$, $x(t) = 0$ konvergiert. Zeigen Sie weiterhin, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenso punktweise gegen x konvergiert, aber nicht gleichmäßig konvergent ist.

2. **Ein Orthonormalsystem [5 P]:** Gegeben sei $C([-\pi,\pi])$, versehen mit dem Skalarprodukt
$$\langle x, y\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t,$$
und die Teilmenge
$$\{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\} \subseteq C([-\pi,\pi]), \quad a_0(t) = 1, \quad a_k(t) = \cos(kt), \quad b_k(t) = \sin(kt), \quad k \in \mathbb{N}$$
Zeigen Sie, dass $\{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$ ein Orthogonalsystem ist und bestimmen Sie das zugehörige Orthonormalsystem. Ist letzteres vollständig in $(C([-\pi,\pi]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$?

3. **Fourierkoeffizienten [5 P]:** Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum, $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ein Orthonormalsystem in V und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für beliebige $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ gilt:
$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - a_k|^2.$$
Hierbei bezeichnen $a_k = \langle e_k, x\rangle$, $k \in \mathbb{N}$ die Fourierkoeffizienten von x bezüglich $\{e_1, e_2, \ldots\}$.

4. **Eine Fourierreihe [5 P]:** Gegeben sei der unitäre Raum $\bar{C}([-\pi,\pi])$ mit dem Orthonormalsystem
$$\{e_0, e_1, e_{-1}, \ldots\}, \quad e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\mathrm{i}kt).$$
Bestimmen Sie die Fourierreihe von
$$x_a \in \bar{C}([-\pi,\pi]), \quad x_a(t) = \exp(\mathrm{i}at), \quad a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$$
bezüglich $\{e_0, e_1, e_{-1}, \ldots\}$. Konvergiert diese Reihe? Was ist Ihr Wert?

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 09.12.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 8

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 16.12.-22.12.2013

---

1. **Eine Fourierreihe [8 P]:** Gegeben sei $C([-\pi,\pi])$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

Bestimmen Sie die Fourierreihe von $x \in C([-\pi,\pi])$,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-\pi, 0] \\ t^2 & t \in [0,\pi] \end{cases}$$

bezüglich des vollständigen Orthonormalsystems

$$\{e_0, e_1, \tilde{e}_1, e_2, \tilde{e}_2, \ldots\} \subseteq C([-\pi,\pi]), \quad e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_k(t) = \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \quad \tilde{e}_k(t) = \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert diese Fourierreihe punktweise gegen x? Wenn nein, warum widerspricht dies nicht Satz 8.11 der Vorlesung?

2. **Ein „neues“ vollständiges Orthonormalsystem [8 P]:** Gegeben sei $C([0,l])$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = \int_0^l x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

und die Teilmenge

$$\{e_0, e_1, e_2, \ldots\} \subseteq C([0,l]), \quad e_0(t) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad e_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $\{e_0, e_1, e_2, \ldots\}$ ein Orthonormalsystem ist. Ist dieses vollständig? (Hinweis zur Frage: Setzen Sie Elemente $x \in C([0,l])$ gerade auf $[-l,0]$ fort und transformieren Sie das Intervall $[-l,l]$ auf $[-\pi,\pi]$)

3. **Dichte Unterräume [4 P]:** Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $W \subseteq V$ ein dichter Unterraum von V. Zeigen Sie: Ist $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in W, so ist $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in V.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 16.12.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 9

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 06.01.-12.01.2014

---

1. **Orthogonale Projektion [6 P]:** Es sei U der von den Funktionen $x_1, x_2, x_3 \in \bar{L}^2([-1,1])$,

$$x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = \mathrm{i}t, \quad x_3(t) = t^3,$$

aufgespannte Unterraum von $\bar{L}^2([-1,1])$. Berechnen Sie die orthogonale Projektion der Funktion $f \in \bar{L}^2([-1,1])$, $f(t) = \exp(t)$, auf den Unterraum U.

2. **Operatornorm [7 P]:** Es seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ zwei unitäre Räume und $\mathscr{L}(V,W)$ die Menge der beschränkten linearen Operatoren zwischen V und W. Zeigen Sie, dass

$$\|A\| = \sup_{x \in V, \|x\|_V = 1} \|Ax\|_W, \quad A \in \mathscr{L}(V,W)$$

eine Norm auf $\mathscr{L}(V,W)$ definiert.

3. **Matrixoperator [7 P]:** Es sei $\mathbb{C}^n$ versehen mit dem Standardskalarprodukt, $(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix und $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ der durch

$$A(x_1, \ldots, x_n) := \left(\sum_{k=1}^n a_{1k} x_k, \ldots, \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k \right)$$

definierte lineare Operator. Zeigen Sie, dass A beschränkt ist und

$$\|A\| \le \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

erfüllt. Ist A stetig?

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 06.01.2014

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 10

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 13.01.-19.01.2014

---

1. **Fouriertransformation [6 P]:** Es sei $f \in S(\mathbb{R})$ eine schnell-fallende Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Geben Sie die Fouriertransformierte von $h \in S(\mathbb{R})$,

   a) $h(x) = f(ax+b)$,

   b) $h(x) = f(x)\sin(bx)$,

   mit Hilfe der Fouriertransformierten von f an.

2. **Sinustransformation [7 P]:** Es sei $f \in S([0,\infty))$ mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte $\hat{\tilde{f}}$ der ungerade Fortsetzung $\tilde{f} \in S(\mathbb{R})$ von f auf $\mathbb{R}$,

   $$\tilde{f}(t) = -f(-t), \quad t \in (-\infty, 0),$$

   die folgenden Gleichungen erfüllt:

   $$\hat{\tilde{f}} = -\mathrm{i}F_s\tilde{f}, \quad \tilde{f} = \mathrm{i}F_s\hat{\tilde{f}}.$$

   Hierbei bezeichnet F_s sie sogenannte Sinustransformation,

   $$(F_s g)(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(kx)g(x)\mathrm{d}x.$$

   Was folgt demnach für $F_s^2 f$ auf $[0,\infty)$?

3. **Kirchhoffsche Formel [7 P]:** Ist das Anfangswertproblem

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 8\cdot\Delta u(x,t) = t^2x_1^2, \quad u(x,0) = x_2^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x_3, \quad x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, t \in (0,\infty)$$

   eindeutig lösbar? Wenn ja, bestimmen Sie die Lösung.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 13.01.2014

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 11

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 20.01.-26.01.2014

---

1. **Fouriertransformation [5 P]:** Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von $f \in S(\mathbb{R})$,
$$f(x) = (x^3 + 1)\exp(-x^2).$$

2. **Symmetrische Operatoren [3 P]:** Es seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum, $D \subseteq V$ ein Unterraum und $A : V \supseteq D \to V$ ein symmetrischer linearer Operator. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in D$ das Skalarprodukt
$$\langle Ax, x \rangle$$
reell ist.

3. **Verallg. Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung [6 P]:** Es seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum, $D \subseteq V$ ein Unterraum und $A : V \supseteq D \to V$ ein nicht-negativer symmetrischer linearer Operator. Zeigen Sie, dass
$$\left|\langle Ax, y \rangle\right|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \langle Ay, y \rangle$$
für alle $x, y \in D$ gilt.

4. **Vergleich von symmetrischen Operatoren [6 P]:** Es seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum, $D \subseteq V$ ein Unterraum und $A, B : V \supseteq D \to V$ zwei symmetrische lineare Operatoren. Zeigen Sie: Ist
$$\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle \quad \forall x \in D,$$
so ist
$$A = B.$$

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 20.01.2014

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 12

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 27.01.-02.02.2014

---

1. **Dirichlet-Problem auf der Kreisscheibe [7 P]:** Es sei

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 4\right\}$$

die offene Kreisscheibe um den Koordinatenursprung mit Radius 2 und $g \in C(\partial\Omega)$,

$$g(2\cos(\varphi), 2\sin(\varphi)) = \begin{cases} \varphi & \varphi \in [0,\pi] \\ 2\pi - \varphi & \varphi \in [\pi, 2\pi] \end{cases},$$

eine auf ihrem Rand definierte stetige Funktion. Bestimmen Sie, sofern diese existiert, eine Lösung $u \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ des Problems

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 && x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x) && x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ist u eindeutig bestimmt?

2. **Dirichlet-Problem auf dem Rechteck [13 P]:** Es sei $\Omega = (0,3) \times (0,4)$. Der Rand $\partial\Omega$ dieses offenen Rechtecks sei unterteilt in die vier Randseiten $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_4$, nummeriert im mathematisch positiven Sinn, beginnend mit der Seite auf der x_1-Achse,

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_4.$$

Bestimmen Sie, sofern diese existiert, eine Lösung $u \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ des Problems

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 && x \in \Omega, \\ u(x_1, 0) &= x_1(3 - x_1)^2 && x_1 \in [0,3], \\ u(x) &= 0 && x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u(0, x_2) &= x_2(4 - x_2) && x_2 \in [0,4]. \end{aligned}$$

Ist u eindeutig bestimmt?

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 27.01.2014

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 13

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 03.02.-09.02.2014

---

1. **Dirichlet-Problem auf der Kreisscheibe II [5 P]:** Es sei

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < a^2\right\}$$

die offene Kreisscheibe um den Koordinatenursprung mit Radius $a \in (0,\infty)$. Führen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \lambda\, u(x) && x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 && x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zurück.

2. **Dirichlet-Problem auf dem Rechteck II [15 P]:** Es sei $\Omega = (0,3) \times (0,4)$. Der Rand $\partial\Omega$ dieses offenen Rechtecks sei unterteilt in die vier Randseiten $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_4$, nummeriert im mathematisch positiven Sinn, beginnend mit der Seite auf der x_1-Achse,

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_4.$$

Bestimmen Sie eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 1 && x \in \Omega, \\ u(x_1, 0) &= x_1(3 - x_1)^2 && x_1 \in [0,3], \\ u(x) &= 0 && x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u(0, x_2) &= x_2(4 - x_2) && x_2 \in [0,4]. \end{aligned}$$

Gehen Sie hierfür wie folgt vor: Bestimmen Sie zunächst die Eigenwerte und normierten Eigenfunktionen des Problems

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \lambda\, u(x) && x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 && x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Entwickeln Sie dann die Inhomogenität $\Omega \ni x \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ in eine Fourierreihe bezüglich dieser Eigenfunktionen. Wenden Sie schließlich Ihr Wissen aus der Vorlesung und der letzten Übungsserie an.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 03.02.2014

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III für Physiker
Serie 14

Ohne Abgabe. Zur Bearbeitung in den Übungen der Wochen 03.02.-16.02.2014

---

1. **Greensche Funktionen:** Untersuchen Sie folgendes Randwertproblem:

$$\begin{aligned} -u''(x) - u(x) &= f(x), \quad x \in [0,1] \\ u(0) &= 0, \\ u'(1) &= 0. \end{aligned}$$

   a) Zeigen Sie, dass der durch dieses Randwertproblem erzeugte lineare Operator injektiv ist.
   b) Berechnen Sie die Greensche Funktion des Randwertproblems.
   c) Lösen Sie das Randwertproblem für $f(x) = x$ mit Hilfe der Greenschen Funktion.
   d) Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenfunktionen des Randwertproblems.
   e) Lösen Sie das Randwertproblem für $f(x) = x$ durch Entwicklung nach den Eigenfunktionen des Randwertproblems.

2. **Schwingungen im Schwerefeld:** Die freien Schwingungen einer hängenden Saite der Länge l unter der Wirkung ihres Eigengewichts werden durch folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - g\frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] &= 0, \quad x \in (0,1), \quad g \in (0,\infty) \\ u(0,t) &= u_0 \in \mathbb{R}, \\ u(l,t) &= 0. \end{aligned}$$

   a) Zeigen Sie, dass sich die Amplituden und Frequenzen der Eigenschwingungen $u(x,t) = X(x)\exp(i\omega t)$ aus folgendem Eigenwertproblem bestimmen:

$$\begin{aligned} -\left[xX'(x)\right]' &= \lambda X(x), \quad x \in (0,l), \quad \lambda = \frac{\omega^2}{g}, \\ X(0) &= X_0, \\ X(l) &= 0. \end{aligned}$$

   b) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen dieses Eigenwertproblems.

⚠ Ohne Abgabe. Zur Bearbeitung in der Übung. ⚠