HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. H.-D. Niepage
Dr. R. Böttcher
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 16.04.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II
Serie 1

Abgabe: bis 25.04.2008

---

1. **Extrema [4 P]:** Gesucht sind alle globalen und lokalen Extrema von

$$f : (1,2) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{(x-1)(2-x)}.$$

Bei Vorliegen eines Extremums ist zu entscheiden, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt (mit Begründung).

2. **Lokale Extrema [3 P]:** Bestimmen Sie die lokalen Extrema von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2.$$

Bei Vorliegen eines Extremums ist zu entscheiden, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt (mit Begründung).

3. **Grenzwerte [8 P]:** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2+1)(\cos(x)-1)}{\sin(x^2)}$,

b) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(x)}{x^2-\pi^2}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\tan(3x)}{\tan(5x)}$.

Begründen Sie Ihre Lösung.

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name und Matr.-Nr. versehen!

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. H.-D. Niepage
Dr. R. Böttcher
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 23.04.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II
Serie 2

Abgabe: bis 02.05.2008

---

1. **Unbestimmte Integrale [10 P]:** Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale von

   a) $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$,

   b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \neq 1$,

   c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,

   d) $f(x) = \dfrac{x^2 - x^3 + 1}{x^5}$, $x \neq 0$,

   e) $f(x) = x \cdot \sqrt[m]{x}$, $m \in \mathbb{N}$.

2. **Bestimmte Integrale [6 P]:** Berechnen Sie die Werte der bestimmten Integrale

   a) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ (Tipp: Substituieren Sie $t = \sqrt{1+x^2}$),

   b) $\displaystyle\int_0^\pi x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

3. **Bestimmte Integrale [4 P]:** Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_0^1 x^2(1-x)^3\,\mathrm{d}x.$$

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name und Matr.-Nr. versehen!

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. H.-D. Niepage
Dr. R. Böttcher
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 30.04.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II
Serie 3

Abgabe: bis 09.05.2008

---

1. **Partielle Integration [4 P]:** Berechnen Sie die folgenden Werte:

   a) $\displaystyle\int_1^2 x \cdot e^x \, \mathrm{d}x,$

   b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) \, \mathrm{d}x.$

2. **Stammfunktionen [4 P]:** Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

   a) $\displaystyle\int \ln(x) \, \mathrm{d}x,$

   b) $\displaystyle\int \cos^2(x) \, \mathrm{d}x.$

3. **Substitution [8 P]:** Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

   a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x,$

   b) $\displaystyle\int \sin(x) \cdot \cos(x) \, \mathrm{d}x,$

   c) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x} \, \mathrm{d}x,$

   d) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x.$

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name und Matr.-Nr. versehen!

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. H.-D. Niepage
Dr. R. Böttcher
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 07.05.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II
Serie 4

Abgabe: bis 16.05.2008

---

1. **Integration [2+4+2 P]:** Bestimmen Sie die folgenden bestimmten/unbestimmten Integrale:

   a) $\displaystyle\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$,

   b) $\displaystyle\int \operatorname{arccot}(x)\,\mathrm{d}x$,

   c) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+1\right)^2 \mathrm{d}x$ und $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x}+1\right)^2 \mathrm{d}x$.

2. **Potenzreihen [9 P]:** Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Potenzreihen:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$,

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}\, x^k$,

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}\, x^k$.

3. **Rechnen mit Potenzreihen [2+2+3 P]:** Gegeben sind die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad\qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^k.$$

   Diese konvergieren absolut für $|x| < 1$ gegen

$$f(x) := \frac{1}{1-x}, \qquad\qquad g(x) := \frac{1}{1+x}.$$

   Bestimmen Sie diejenigen Potenzreihen, welche gegen die folgenden Funktionen konvergieren:

   a) $f+g$,

   b) $f-g$,

   c) $f\cdot g$.

   Begründen Sie Ihre Lösung und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten dieser Potenzreihen.

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name und Matr.-Nr. versehen!

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. H.-D. Niepage
Dr. R. Böttcher
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 14.05.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II
Serie 5

Abgabe: bis 23.05.2008

---

1. **Taylorreihen [8 P]:** Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellung folgender Hyperbelfunktionen und deren Konvergenzgebiet:

   a) $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{i}\sin(i\,x),\ x \in \mathbb{R}$,

   b) $\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(i\,x),\ x \in \mathbb{R}$.

2. **Anwendung der Taylorformel [3+3+4 P]:** Stellen Sie die folgenden Funktionen durch ein n-tes Taylorpolynom und Restglied im Entwicklungspunkt $a = 0$ dar:

   a) $f(x) = \alpha^x,\ \alpha > 0,\ x \in \mathbb{R}$,

   b) $f(x) = \ln(1 + x),\ x > -1$,

   c) $f(x) = (1 + x)^p,\ p \in \mathbb{R}$ fixiert, $x \in \mathbb{R}$.

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name und Matr.-Nr. versehen!

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. H.-D. Niepage
Dr. R. Böttcher
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 21.05.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II
Serie 6

Abgabe: bis 30.05.2008

---

1. **Vektornormen [4 P]:** Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit $x = [x_1, \ldots, x_n]^T \in X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ Normen sind:

   a) $\|x\|_\infty := \max(|x_i|,\, i = 1, \ldots, n)$,

   b) $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$.

2. **Matrixnormen [6 P]:** Sei $X = \mathbb{R}^{(n,n)}$ der Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen $A = (a_{ij}) \in X$. Zeigen Sie, $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ist eine Norm:

   a) $\|A\|_\infty := \max\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,\, i = 1, \ldots, n\right)$ (Zeilensummennorm),

   b) $\|A\|_2 := \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$ (Quadratsummennorm).

3. **Normen stetiger Funktionen [4 P]:** Sei $X = \mathscr{C}[a,b]$ der Raum der auf dem Intervall $[a,b]$ stetigen Funktionen f. Zeigen Sie:

   a) $\|f\|_\infty := \max\big(|f(x)|,\, x \in [a,b]\big)$ ist eine Norm,

   b) $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$ mit $p \in [1, \infty)$ ist eine Norm.

4. **Skalarprodukte [6 P]:** Zeigen Sie:

   a) Auf $X = \mathbb{C}^n$ definiert $< x, y >:= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{y}_i$ ein Skalarprodukt, wobei $x = [x_1, \ldots, x_n]^T \in X$ und $y = [y_1, \ldots, y_n]^T \in X$,

   b) Auf $X = \mathscr{C}[a,b]$ definiert $< f, g >:= \int_a^b f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x$ ein Skalarprodukt.

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name und Matr.-Nr. versehen!

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. H.-D. Niepage
Dr. R. Böttcher
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 28.05.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II
Serie 7

Abgabe: bis 06.06.2008

---

1. **Vollständigkeit [4 P]:** Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und A eine nichtleere Teilmenge, i.e. $\emptyset \neq A \subset X$. Beweisen Sie:

   a) A ist abgeschlossen $\Rightarrow$ A ist vollständig,

   b) X ist abgeschlossen.

2. **Intervalle [8 P]:** Gegeben seien geschlossene und offene Intervalle $[a_i, b_i]$ und (a_i, b_i) der reellen Zahlengerade $(\mathbb{R}, \mathrm{d}(x, y) = |x - y|)$, wobei $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ und $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen bezeichnen. Beweisen Sie:

   a) $\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen,

   b) $\bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen $(n \in \mathbb{N})$,

   c) $\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$ ist offen,

   d) $\bigcap_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$ ist offen $(n \in \mathbb{N})$.

3. **Kugeln [4 P]:** Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ fixiert. Beweisen Sie:

   a) $\mathrm{K}_r(\bar{x}) := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| \leq r\right\}$ ist abgeschlossen,

   b) $\mathrm{K}_r^0(\bar{x}) := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < r\right\}$ ist offen.

4. **Stetigkeit einer Norm [2 P]:** Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Beweisen Sie, dass die Norm $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Abbildung ist.

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name und Matr.-Nr. versehen!

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. H.-D. Niepage
Dr. R. Böttcher
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 03.06.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II
Serie 8

Abgabe: bis 13.06.2008

---

1. **Stetigkeit vektorwertiger Abbildungen [4 P]:** Sei (X, d) ein metrischer Raum und

$$f = [f_1, \ldots, f_n]^T$$

eine Abbildung von X nach $\mathbb{C}^n$, wobei $f_i : X \to \mathbb{C}$ für $i = 1, \ldots, n$. Beweisen Sie:

$$f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow f_i \text{ ist stetig für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

2. **Stetigkeit elementarer Operationen [6 P]:** Beweisen Sie die Stetigkeit folgender Abbildungen:

   a) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ (Addition),

   b) $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ (Multiplikation),

   c) $/ : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x/y$ (Division).

3. **Rechnen mit stetigen Funktionen [6 P]:** Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ hierauf definierte stetige Funktionen. Beweisen Sie:

   a) $(f + g) : X \to \mathbb{R}$ ist stetig,

   b) $(f \cdot g) : X \to \mathbb{R}$ ist stetig,

   c) $(f/g) : X \to \mathbb{R}$ ist stetig, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$.

4. **Abstand zu einer Menge [2+4 P]:** Sei (X, d) ein metrischer Raum und $K, A \subset X$ zwei Teilmengen. Dann definiert die Menge

$$\mathrm{dist}(x, A) := \inf\{\mathrm{d}(x, y),\ y \in A\} \qquad \big(\text{bzw.} \quad \mathrm{dist}(K, A) := \inf\{\mathrm{dist}(x, A),\ x \in K\}\big)$$

den *Abstand eines Punktes $x \in X$ zur Menge A* (bzw. den *Abstand der Menge K zur Menge A*). Beweisen Sie:

   a) $\mathrm{dist}(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion,

   b) Ist A abgeschlossen, K kompakt und $A \cap K = \emptyset$, dann gilt $\mathrm{dist}(K, A) > 0$.

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name und Matr.-Nr. versehen!

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. H.-D. Niepage
Dr. R. Böttcher
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 11.06.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II
Serie 9

Abgabe: bis 20.06.2008

---

1. **(Partielle) Differenzierbarkeit [2+3+3 P]:** Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \sqrt[3]{x^3 + y^3} \in \mathbb{R}$$

unter den folgenden Aspekten (mit Begründung):

a) Wo ist f stetig?

b) Wo ist f partiell differenzierbar? Berechnen Sie - wo zulässig - die partiellen Ableitungen.

c) Wo ist f differenzierbar?

2. **Drehung der Achsen[3+2 P]:** Die Koordinatentransformation für eine Drehung rechtwinkliger Koordinatenachsen um den Winkel α sei gegeben durch die Funktionen

$$x(u, v) := \cos(\alpha) \cdot u - \sin(\alpha) \cdot v, \qquad y(u, v) := \sin(\alpha) \cdot u + \cos(\alpha) \cdot v.$$

Sei weiterhin $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion. Untersuchen Sie die Komposition $g : \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}$ (dieser Funktion mit der obigen Drehung) unter den folgenden Gesichtspunkten:

a) Zeigen Sie, dass g differenzierbar ist und berechnen Sie die zugehörige Jacobi-Matrix.

b) Berechnen Sie den Gradienten $\operatorname{grad}(g)$ von g.

3. **Norm als Funktion[4 P]:** Zu betrachten ist die Funktion $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$r(x_1, \ldots, x_n) := \| [x_1, \ldots, x_n]^T \|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Zeigen Sie, dass r auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen.

4. **Kugelkoordinaten [3 P]:** Sei $f : \mathbb{R}^3 \supset A \to \mathbb{R}^3$ die Komposition der Identität mit der Koordinatentransformation auf Kugelkoordinaten

$$x(r, \phi, \theta) := r \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\theta), \qquad y(r, \phi, \theta) := r \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\theta), \qquad z(r, \phi, \theta) := r \cdot \sin(\theta),$$

d.h. $f(r, \phi, \theta) = [x(r, \phi, \theta), y(r, \phi, \theta), z(r, \phi, \theta)]^T$ mit $A = \left\{(r, \phi, \theta) : r > 0, 0 < \phi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name und Matr.-Nr. versehen!

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. H.-D. Niepage
Dr. R. Böttcher
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 18.06.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II
Serie 10

Abgabe: bis 27.06.2008

---

1. **Extrema [4 P]:** Klassifizieren Sie sämtliche lokale Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto 2\,x^2 + 2\,x \cdot y + 3\,y^2 - 6\,x - 8\,y + 1 \in \mathbb{R}.$$

2. **Extrema II - Abhängig [6 P]:** Untersuchen Sie in Abhängigkeit des Parameters $c \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen auf ihre lokalen Extrema:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto c + x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$,
   b) $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto c - x^2 - y^2 \in \mathbb{R}$,
   c) $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto c + x^2 - y^2 \in \mathbb{R}$.

3. **Extrema III - Extrem Abhängig [6 P]:** Zu betrachten ist die 3-parametrige Schar von Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := A\,x^2 \cdot y + B\,x \cdot y^2 - C\,x \cdot y$$

   mit $A, B, C \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Untersuchen Sie - abhängig vom Verhältnis der Parameter A, B, C zueinander - die Funktion f auf ihre lokalen Extrema.

4. **Wirkungverlauf von Medikamenten [4 P]:** Die Wirkung $W(E, t)$, die E Einheiten eines Medikaments t Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, sei durch

$$W(E, t) = E^2(x - E)\,t^2 \mathrm{e}^{-t} \quad (0 \le E \le x, t \ge 0)$$

   dargestellt. Bestimmen Sie die Dosis $E_{\max}$ und die Zeit $t_{\max}$ so, dass $W(E_{\max}, t_{\max})$ maximal ist.

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name, M.-Nr. und Ü.-Gr. versehen!

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. H.-D. Niepage
Dr. R. Böttcher
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 25.06.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II
Serie 11

Abgabe: bis 04.07.2008

---

1. **Beweis [10 P]:** Beweisen Sie die Eigenschaften a) bis e) von Satz 1 der Vorlesung über Gebietsintegrale.

2. **Gebietsintegration [3 P]:** Berechnen Sie

$$\int\int_G x \, \mathrm{d}G,$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Gerade $f_1(x) = x + 2$ und durch die Parabel $f_2(x) = 4 - x^2$ begrenzte Gebiet ist.

3. **Gebietsintegration II [4 P]:** Seien $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1\right\} \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \ni (x, y) \mapsto \frac{x - y}{(x + y)^3} \in \mathbb{R}$$

vorgegeben. Berechnen Sie die Doppelintegrale nach den Formeln (9a) und (9b) der Vorlesung und entscheiden Sie (mit Begründung), ob $\int\int_G f(x, y) \, \mathrm{d}G$ existiert.

4. **Gebietsintegration III [4 P]:** Berechnen Sie $\int\int_G x \cdot y^2 \, \mathrm{d}G$ mit

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \le 1 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

nach den Formeln (9a) und (9b) der Vorlesung.

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name, M.-Nr. und Ü.-Gr. versehen!

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. H.-D. Niepage
Dr. R. Böttcher
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 02.07.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II
Serie 12

Abgabe: bis 11.07.2008

---

1. **Mehrfachintegration [3 P]:** Berechnen Sie $\int\int\int_G f(x,y,z)\,\mathrm{d}G$ für

$$f(x,y,z) := 1 + x, \qquad G := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le x,\, -y^2 \le z \le x^2\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

2. **Volumen [3 P]:** Berechnen Sie das Volumen V des Gebietes G aus Aufgabe 1.

3. **Zylinderkoordinaten [5 P]:** Berechnen Sie $\int\int\int_G x^2 \cdot y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ für

$$G := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0,\, y \ge 0,\, x^2 + y^2 \le 1,\, 0 \le z \le 1\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

   Verwenden Sie hierbei Zylinderkoordinaten,

$$x = r \cdot \cos(\varphi), \qquad y = r \cdot \sin(\varphi), \qquad z = \xi \qquad \text{mit} \qquad r > 0, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

4. **Kugeloktant [7 P]:** Sei

$$K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0,\, y \ge 0,\, z \ge 0,\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

   ein Kugeloktant mit konstanter Dichte $\rho(x,y,z) = 1$, $(x,y,z) \in K$.

   a) Berechnen Sie die Masse $M := \int\int\int_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ von K.
   b) Berechnen Sie das Volumen von K.
   c) Berechnen Sie den Schwerpunkt

$$[x_0, y_0, z_0]^T := \frac{1}{M}\left[\int\int\int_K \rho \cdot x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\, \int\int\int_K \rho \cdot y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\, \int\int\int_K \rho \cdot z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right]^T$$

   von K unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

Bitte beachten: Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name, M.-Nr. und Ü.-Gr. versehen!