HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. R. Kloosterman
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 20.04.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 1

Abgabe: in Ihrer Übung, 27.04.2009 bis 29.04.2009.

---

1. **Extrema [5 P]:** Bestimmen Sie alle globalen und lokalen Extrema von

$$f : [-1,4] \setminus \{1,2,3\} \ni x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \in \mathbb{R}.$$

Bei Vorliegen eines Extremums ist zu entscheiden, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt. Begründen Sie Ihre Aussagen.

2. **Grenzwerte und Extrema [2+2+2 P]:** Es sei

$$f : (-1,1) \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{x}{\ln|x|} \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Ist die durch

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in 0? Falls ja, bestimmen Sie $g'(0)$.

c) Bestimmen Sie alle Extrema von g.

3. **Grenzwerte [1+1+1+1 P]:** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^2+1}$,

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\left(x \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{x^2-1}$,

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+2x^3+2x^2-4x-1}{x^3+3x^2+2x-6}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Begründen Sie Ihre Aussagen.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name, Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. R. Kloosterman
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 27.04.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 2

Abgabe: in Ihrer Übung, 04.05.2009 bis 06.05.2009.

---

1. **Unbestimmte Integrale [1+1+1+1+1 P]:** Bestimmen Sie die Stammfunktionen von

$$f : \mathbb{R} \supseteq M \to \mathbb{R}$$

mit

a) $f(x) = \exp(-5x)$.

b) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

c) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x-1}$.

d) $f(x) = \tan(x)$.

e) $f(x) = \cosh^2(x)$.

Hierbei bezeichnet M jeweils den maximalen Definitionsbereich innerhalb der reellen Zahlen.

2. **Bestimmte Integrale [3+3 P]:** Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals

a) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sin^4(x)\,\mathrm{d}x$.

3. **Bestimmte Integrale [2+2 P]:** Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals

a) $\displaystyle\int_0^1 x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_{-3}^3 x\cdot\ln\left(x^4+x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name, Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. R. Kloosterman
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 04.05.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 3

Abgabe: in Ihrer Übung, 18.05.2009 bis 20.05.2009.

---

1. **Integration rationaler Funktionen [2+3 P]:** Bestimmen Sie alle Stammfunktionen

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

mit

a) $f(x) = \dfrac{2x-13}{x^2-x-2}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^3+12x+19}{\left(x^2+4x+5\right)\left(x-3\right)^2}$.

2. **Uneigentliche Integrale [2+2+2 P]:** Untersuchen Sie für jeden der nachstehenden Ausdrücke, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

konvergiert.

a) $f(x) = x^3 \cdot \exp(-x)$.

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^3+x^2+1}$.

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+x^2+1}$.

3. **Integralvergleichskriterium [1+1+2 P]:** Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum \exp(-k)$.

b) $\sum \dfrac{1}{k^2+1}$.

c) $\sum \dfrac{1}{k\cdot(\ln(k))^a}$, $a \in (1,\infty)$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name, Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. R. Kloosterman
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 18.05.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 4

Abgabe: in Ihrer Übung, 25.05.2009 bis 27.05.2009.

---

1. **Konvergenzradius [1+1+1 P]:** Bestimmen Sie den Konvergenzradius von

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot x^k, \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k! \cdot x^k, \qquad \text{c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}.$$

2. **Konvergenzverhalten [5 P]:** Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} x^k.$$

Tipp: Es gilt

$$\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-n + \frac{1}{12n+1}\right) < n! < \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-n + \frac{1}{12n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. **Rechnen mit Potenzreihen [2+2+2 P]:** Gegeben sind die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot k \cdot x^k.$$

Diese konvergieren absolut für $x \in (-1,1)$ gegen

$$\frac{x}{(1-x)^2} =: f(x), \qquad \frac{x}{(1+x)^2} =: g(x).$$

Bestimmen Sie diejenigen Potenzreihen, welche gegen die folgenden Funktionen konvergieren:

$$\text{a)} \quad (f+g) : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad \text{b)} \quad (f-g) : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad \text{c)} \quad (f \cdot g) : (-1,1) \to \mathbb{R}.$$

4. **Funktionenfolge [1+2+1+2 P]:** Sei

$$f_n : [0,\infty) \ni x \mapsto \frac{1}{n} \cdot \exp\left(-\frac{x}{n}\right) \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, dass f_n, $n \in \mathbb{N}$ monoton fallend ist.
b) Bestimmen Sie $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$.
c) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f : [0,\infty) \ni x \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ konvergiert.
d) Berechnen Sie $\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$. Gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x?$$

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name, Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. R. Kloosterman
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 25.05.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 5

Abgabe: in Ihrer Übung, 01.06.2009 bis 03.06.2009.

---

1. **Taylorpolynome [1+2+1 P]:** Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie für jede der Funktionen

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$$

das Taylorpolynom n-ter Ordnung in $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \arctan(x)$.

b) $f(x) = \ln(1-x)$.

c) $f(x) = \ln\left(1-x^3\right)$.

Bestimmen Sie weiterhin das zugehörige Restglied für b).

2. **Taylorpolynome II [5 P]:** Seien mit P und Q zugehörig die Taylorpolynome 5-ter Ordnung von sin und cos in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ bezeichnet. Bestimmen Sie P und Q und berechnen Sie damit

$$P^2 + Q^2.$$

3. **Reelle Zahlengerade [6 P]:** Es seien

$$U_1 = \bigcup_{k=1}^{10} \left[k, k+\frac{1}{2}\right), \qquad U_2 = \bigcup_{k=1}^{10} [k, k+1), \qquad U_3 = \left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Bestimmen Sie für $i = 1,2,3$ jeweils den Rand, das Innere und die abgeschlossene Hülle von U_i. Welche der Mengen U_1, U_2, U_3 ist offen und welche abgeschlossen?

4. **Diskrete Metrik [5 P]:** Sei X eine mit der diskreten Metrik versehene Menge. Zeigen Sie, dass jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ stetig ist. Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$B_\varepsilon(x) = \{x\}$$

für alle $x \in X$ und $\varepsilon \in [0,1)$ gilt.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name, Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. R. Kloosterman
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 08.06.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 6

Abgabe: in Ihrer Übung, 15.06.2009 bis 17.06.2009.

---

1. **Partielle Ableitungen [3+2 P]:** Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch die Zuordnung

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{falls } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

   a) Bestimmen Sie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1).$$

   b) Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar in $(0,0)$ bzw. $(1,1)$?

2. **Jacobi-Matrix [2+2+2 P]:** Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix für

   a) $f:\mathbb{R}^2\ni(x,y)\mapsto\left(\cos\left(x^2+y^2\right),\sin\left(x^2+y^2\right)\right)\in\mathbb{R}^2$.
   b) $g:\mathbb{R}^3\ni(u,v,w)\mapsto\left(w,u^2+v^2\right)\in\mathbb{R}^2$.
   c) $h:\mathbb{R}^3\ni(\theta,\varphi,r)\mapsto\left(r\cos(\varphi)\sin(\theta),r\sin(\varphi)\sin(\theta),r\cos(\theta)\right)\in\mathbb{R}^3$.

3. **Divergenz und Gradient [2+2 P]:** Bestimmen Sie $\operatorname{div}(f)$ für

   a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit $f(x,y)=\left(xy^4+y^5,x^3y^2\right)$.
   b) $f=\operatorname{grad}(g)$ mit

$$g:\mathbb{R}^3\ni(s,t,r)\mapsto\sqrt[3]{s^4+t^4+r^4}\in\mathbb{R}.$$

4. **Differenzierbarkeit [2+2+1 P]:** Sei

$$f:\mathbb{R}^3\supseteq M\ni(x,y,z)\mapsto\sqrt[5]{xyz(x+y+z)}\in\mathbb{R}$$

   a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich M und die Teilmenge $U\subseteq M$, auf welcher f partiell differenzierbar ist.
   b) Ist f stetig differenzierbar auf U?
   c) Ist f total differenzierbar auf U?

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name, Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. R. Kloosterman
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 15.06.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 7

Abgabe: in Ihrer Übung, 22.06.2009 bis 24.06.2009.

---

1. **Viele Extrema [5 P]:** Bestimmen Sie alle Extrema von

$$f : (0,3\pi) \times (0,3\pi) \ni (x,y) \mapsto \sin(x+y) - \cos(x-y) \in \mathbb{R}.$$

2. **Keine Extrema [5 P]:** Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = xy\exp(x^2+y^2)$$

keine Extrema besitzt.

3. **Taylorentwicklung [1+2+2 P]:** Es sei

$$h : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \cos(x^3+y^3) - \sin(x+y) + \cos(x+y) \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie:

a) Den Gradienten von h in $(0,0)$.

b) Die Hesse'sche Matrix von h in $(0,0)$.

c) Das Taylorpolynom zweiter Ordnung von h in $(0,0)$.

4. **Transformation [4+1 P]:** Sei $n \in \mathbb{N}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine injektive lineare Abbildung und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung, welche

$$Df(x) \neq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt.

a) Zeigen Sie, dass

$$(f \circ g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

kein Extremum besitzt.

b) Geben Sie für $n = 2$ ein nicht-triviales Beispielpaar (f,g) solcher Funktionen an. Begründen Sie Ihre Wahl.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name, Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. R. Kloosterman
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 22.06.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II
Serie 8

Abgabe: in Ihrer Übung, 29.06.2009 bis 01.07.2009.

---

1. **Funktionenschar [2+2+1+1+2+2 P]:** Es seien $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $i, j \in \{0,1,2\}$, $i + j \leq 2$ und

$$\{a_{20}, a_{11}, a_{02}\} \neq \{0\}.$$

Weiterhin sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{00}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie:

a) Ist $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} \neq 0$, so besitzt f höchstens ein Extremum.
b) Ist $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} > 0$, so besitzt f kein Extremum.
c) Ist $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} < 0$ und $a_{20} > 0$, so besitzt f ein strenges lokales Minimum.
d) Ist $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} < 0$ und $a_{20} < 0$, so besitzt f ein strenges lokales Maximum.
e) Ist $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} = 0$, so besitzt f kein Extremum oder es existiert ein Gerade $L \subseteq \mathbb{R}^2$, derart dass
$$\operatorname{grad}\left(f\right)(x) = 0 \quad \forall x \in L. \qquad (\star)$$
f) Ist $(\star)$ für eine Gerade $L \subseteq \mathbb{R}^2$ erfüllt, so besitzt f in jedem Punkt von L ein Extremum.

2. **Differenzialgleichungen [2+2+2+2+2 P]:** Bestimmen Sie alle Lösungen der nachstehenden Differenzialgleichungen. Überprüfen Sie jeweils, ob die Lösungen einen Vektorraum bilden.

a) $y' = 2y + \cos(x)$
b) $y' = 5y$
c) $y' = \exp(x)\, y + \exp(3x)$
d) $y' = \exp\left(y\right)\cos(x)$
e) $y' = \sqrt{1 - y^2}$

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name, Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. R. Kloosterman
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 29.06.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 9

Abgabe: in Ihrer Übung, 06.07.2009 bis 08.07.2009.

---

1. **Matrixexponential [2+2+2 P]:** Berechnen Sie $\exp(At)$, $t \in \mathbb{R}$ für

   a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

2. **Homogene AWP [2+2 P]:** Lösen Sie $x' = Ax$ mit $x(0) = c$ für

   a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. **Inhomogene AWP [2+2+2 P]:** Lösen Sie

   a) $x'' - 3x' + 2x = \cos$ mit $x(0) = 0$ und $x'(0) = 1$.

   b) $x'' - x = \exp$ mit $x(0) = 2$ und $x'(0) = -1$.

   c) $x'' + 9x = f$ mit $x(0) = x'(0) = -1$ und $f : \mathbb{R} \ni t \mapsto t + t^2 \in \mathbb{R}$.

4. **Kontraktion [1+3 P]:** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ eine lineare Abbildung.

   a) Geben Sie einen Fixpunkt von f an.

   b) Angenommen, es existiert ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ derart, dass

   $$f(x) = x.$$

   Zeigen Sie, dass f in diesem Fall keine Kontraktion ist.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name, Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. R. Kloosterman
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 06.07.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 10

Abgabe: in Ihrer Übung, 13.07.2009 bis 15.07.2009.

---

1. **Gebietsintegration [3+2 P]:** Berechnen Sie

   a) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ für $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2-y^2} & \text{falls } x^2\geq y^2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$.

   b) $\int\int_G y\cdot\exp(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mit $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq y\leq 1\}\subseteq\mathbb{R}^2$.

2. **Mehrfachintegration [3+2 P]:** Berechnen Sie

   a) $\int\int\int_{B_r} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ für $f(x,y,z)=z$ und $f(x,y,z)=z^2$ mit

   $$B_r=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq r^2\}\subseteq\mathbb{R}^3,\quad r\in[0,\infty).$$

   b) $\int\int\int_G x\cdot y\cdot z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ mit $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 1\wedge 0\leq z\leq 2\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

3. **Volumen [3 P]:** Berechnen Sie das Volumen $V=\int\int\int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ von

   $$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x\leq 1\wedge 0\leq y\leq x\wedge -y^2\leq z\leq x^2\}\subseteq\mathbb{R}^3.$$

4. **Kugeloktant [2+1+4 P]:** Sei

   $$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0\wedge y\geq 0\wedge z\geq 0\wedge x^2+y^2+z^2\leq 1\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

   ein Kugeloktant mit konstanter Dichte $\rho(x,y,z)=7$ für alle $(x,y,z)\in K$.

   a) Berechnen Sie die Masse $M=\int\int\int_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ von K.

   b) Berechnen Sie das Volumen von K.

   c) Berechnen Sie den Schwerpunkt

   $$(x_S,y_S,z_S)=\frac{1}{M}\left(\int\int\int_K \rho\cdot x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \int\int\int_K \rho\cdot y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \int\int\int_K \rho\cdot z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)\in\mathbb{R}^3$$

   von K.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name, Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Dr. R. Kloosterman
Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 13.07.2009

Probeklausur zur Vorlesung Analysis II

---

1. **Integration/Funktionenfolgen:** Es sei $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x} & \text{falls } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist f_n, $n \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar? Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \;\; \forall x \in [0,2], \quad \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig?

2. **Potenzreihen/Taylorreihen:** Stellen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto s^x \in \mathbb{R}, \quad s \in (0,\infty)$$

durch ein n-tes Taylorpolynom und Restglied im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ dar.

3. **Metrische Räume:** Sei (X,d) ein metrischer Raum bestehend aus einer nicht-endlichen Menge X und der diskreten Metrik d. Zeigen Sie, dass in diesem Raum jede nicht-endliche Teilmenge $V \subseteq X$ beschränkt und abgeschlossen, jedoch nicht kompakt ist.

4. **Differenzialrechnung:** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \exp(x_1) - 1 & \text{falls } x_1 = x_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   a) Zeigen Sie, dass f genau dann partiell differenzierbar in (x_1,x_2) ist, wenn $x_1 \neq x_2$ oder $x_1 = x_2 = 0$ gilt.
   b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $D_v f(0,0)$ für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2$.

5. **Differenzialgleichungen:** Bestimmen Sie die Lösungen $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ von

   a) $\exp(t)\,x'(t) = t\,(x(t)+1)$, b) $x''(t) + x(t) = t^3 + 6t + 2$.

6. **Gebietsintegration:** Berechnen Sie $\int\int_G f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ für

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x_1,x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}, \quad G = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \wedge 0 \leq x_2 \leq x_1\right\}.$$

⚠ Ohne Abgabe. Zur Bearbeitung in Ihren Übungen, 13.07.2009 bis 15.07.2009. ⚠