Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis II (SoSe 2010)

Serie 1

Die Abgabe erfolgt vor Beginn Ihrer Übung im Zeitraum 26.04.2010 bis 28.04.2010.

1. (1+2+2 Punkte) Untersuchen Sie, an welchen Stellen die folgenden Funktionen stetig, differenzierbar bzw. stetig differenzierbar sind:

a) $[0,\infty) \ni s \mapsto \sqrt{s} \in \mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R}\backslash\{0\} \ni t \mapsto t^{-2} \cdot (2\sin(t) + \cos(t)) \in \mathbb{R}$.

c) $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$ mit $f(u) := \begin{cases} u \cdot \sin\left(\frac{1}{u}\right) & \text{falls } u \neq 0 \\ 0 & \text{falls } u = 0. \end{cases}$

Geben Sie weiterhin jeweils, wo existent, die Ableitung an.

2. (1+2+2 Punkte) Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{N}$ die k-te Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto (a \cdot x + b)^l \in \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$.

b) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x \cdot f(x) \in \mathbb{R}$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, einer k-mal differenzierbaren Funktion.

c) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(-x) \cdot x^k \in \mathbb{R}$.

Geben Sie das Ergebnis von c) in der Form $k! \cdot \exp(-x) \cdot L_k(x)$ an. Die Funktionen $L_k(x)$ nennt man die *Laguerre'schen Polynome*.

3. (1+2+2 Punkte) Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung beweise man:

a) Die Ableitung von $(x \cdot (x-1))^2$ besitzt wenigstens eine Nullstelle zwischen 0 und 1.

b) Es gilt
$$n \cdot x^{n-1} \geq \frac{x^n - y^n}{x - y} \geq n \cdot y^{n-1}$$
für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > y > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

c) Die Gleichung $x^n + p \cdot x + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ besitzt höchstens zwei reelle Lösungen für gerade n und höchstens drei reelle Lösungen für ungerade n.

4. (1+2+2 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$, b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\tan(2x)}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2 + 3\exp(x)}{5 + 7x}\right)$.

5. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\sin'(x) = \cos(x)$, b) $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis II (SoSe 10)

Serie 2

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Vorlesung am 05.05.2010.

1. (2+2+2 Punkte) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn

a.) $f(x) = 3^{3^x}$ mit $X = \mathbb{R}$

b.) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$ mit $X = \mathbb{R}_+$

c.) $f(x) = (1 + x^2)^{\sin(x)}$ mit $X = \mathbb{R}$

2. (2+2 Punkte)

a.) Bestimmen Sie das Taylorpolynom n-ten Grades mit Entwicklungspunkt Null der Funktion

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe vollständiger Induktion.

b.) Approximieren Sie $\ln(1.05)$ bis auf 5 Dezimalstellen. Wie groß muss n sein?

3. (5 Punkte) Der Abstand zwischen zwei Punkten (x, y) und (u, w) in $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$D := \sqrt{(x - u)^2 + (y - w)^2}.$$

Finden Sie jenen Punkt auf der Kurve $y = x^3$, der am nächsten zu $(0, 1)$ liegt.

4. (2+3 Punkte) Welche der folgenden Funktionen $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Kontraktionen? Begründen Sie Ihre Antworten.

a.) $f(x) = x^2$ mit $X = \mathbb{R}_+$

b.) $f(x) = \inf\left\{\frac{1}{2}|x - z| \,|0 \le z \le 1\right\}$ mit $X = \mathbb{R}$

5. (Vortrag zu Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:
Eine Funktion $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls gilt

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in X,\ \forall \lambda \in (0, 1).$$

a.) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, und es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig fixiert. Weiter definiere $t_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Tangente von f im Punkt x. Zeigen Sie, dass $t_x(y) \le f(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine geometrische Interpretation des Resultats an.

b.) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \inf\left\{\frac{1}{2}|x - z| \,|0 \le z \le 1\right\}$ konvex auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis II (SoSe 2010)

Serie 3

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Vorlesung am 12.05.2010.

---

1. (5 Punkte) Bestimmen Sie alle globalen und lokalen Extrema von

$$f : [-1,4] \setminus \{1,2,3\} \ni x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \in \mathbb{R}.$$

Bei Vorliegen eines Extremums ist zu entscheiden, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt. Begründen Sie Ihre Aussagen.

2. (2+2+1 Punkte) Es seien mit P und Q zugehörig die Taylorpolynome 5-ter Ordnung von sin und cos mit Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ bezeichnet. Bestimmen Sie P und Q und berechnen Sie damit

$$P^2 + Q^2.$$

3. (1+2+2 Punkte) Es sei $f_n : \mathbb{R} \supseteq M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch die Zuordnung

$$f_n(x) := \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

Bestimmen Sie die Funktion f gegen die (f_n) punktweise konvergiert. Zeigen Sie dann:

a) Ist $M = \mathbb{R}$, so konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f.

b) Ist $M = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \alpha < 1\}$ mit $\alpha \in (0,1)$, so konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.

4. (2+3 Punkte) Es sei

$$f_n : (0,\infty) \ni x \mapsto x + \frac{1}{n} \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^\times.$$

Zeigen Sie:

a) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig.

b) Weder $\left(\frac{1}{n} f_n\right)$ noch $\left(f_n^2\right)$ ist gleichmäßig konvergent.

5. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens die Lösungen der folgenden Gleichungen bis auf einen absoluten Fehler $\varepsilon \leq 10^{-3}$:

a) $x^3 + 2\,x = 5$, b) $2\,\cos(x) = x^2$.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis II (SoSe 2010)

Serie 4

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Vorlesung am 19.05.2010.

1. (5 Punkte) Finden Sie alle Minima der Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$ unter den Nebenbedingungen $2y^2 - 4x^2 = 8$ und $0 \leq y$. Begründen Sie Ihre Aussagen!

2. (5 Punkte) Um Gartenpflanzen vor der Kälte zu schützen, wird ein viereckiges Stück Plastik, dessen Ausmaße 10x2 Meter beträgt, einmal parallel zur langen Kante gefaltet. Wie ist die Höhe des so entstehenden Prismas zu wählen, um das Volumen zu maximieren?

3. (5 Punkte) Die Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) seien auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{n} & x > 0 \\ \frac{1}{n} & x = 0 \end{cases}, \quad g_n(x) := \frac{1}{n}.$$

Zeigen Sie, dass, obwohl (f_n) und (g_n) gleichmäßig konvergieren, $(f_n \cdot g_n)$ nicht gleichmäßig konvergent ist.

4. (5 Punkte) Gegeben sei $f \in C^2([a, b], \mathbb{R}_0^+)$ mit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $h := (b - a)/n$. Die Fläche zwischen der durch f bestimmten Kurve und der x-Achse kann durch

$$\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + \frac{1}{2}f(b)\right] h$$

approximiert werden. Dabei ist der absolute Fehler zwischen der Approximation und dem tatsächlichen Wert nach oben beschränkt:

$$|R(f, h)| \leq \frac{b - a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Wenn $a = 0$, $b = 1$ und $f(x) := 1/1 + x^2$, beträgt die Fläche genau $\pi/4 = 0.7853981633....$ Approximieren Sie diesen Wert mit Hilfe des angebenen Ausdrucks für $n = 4$. Wie muss n gewählt werden, um den exakten Wert bis auf 7 Dezimalstellen zu approximieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe des angegebenen Fehlerschätzers.

5. (Vortrag zu Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:
Gegeben sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n+2} & x \in [\frac{-1}{n}, \frac{-1}{n+1}) \cup (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- f ist eine Treppenfunktion für alle $n \in \mathbb{N}$
- f ist eine sprungstetige Funktion für alle $n \in \mathbb{N}$

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis II (SoSe 2010)

Serie 5

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Vorlesung am 26.06.2010.

---

1. (5 Punkte) Seien E_j, $j = 0, \ldots, n$ normierte Vektorräume und

$$f = (f_0, \ldots, f_n) : I \to E := E_0 \times \cdots \times E_n.$$

Man zeige: f ist sprungstetig genau dann, wenn f_j sprungstetig für $j = 0, \ldots, n$ ist.

2. (5 Punkte) Seien X, Y Banach-Räume mit $\dim X < \infty$. Sei weiterhin $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass T beschränkt und somit ein stetiger linearer Operator ist.

3. (5 Punkte) Seien X, Y normierte Vektorräume. $\mathcal{L}(X, Y)$ bezeichnet den Raum der stetigen linearen Operatoren $T : X \to Y$. Zeigen Sie, dass die Menge $\ker(T) := \{x \in X \,|\, Tx = 0_Y\}$ ein abgeschlossener Teilraum von X ist, wenn $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

4. (5 Punkte) Sei $\mathcal{T}([0, 1])$ der Raum aller Treppenfunktion auf $[0, 1]$ und $T : \mathcal{T}([0, 1]) \to \mathbb{R}$ ein linearer Operator mit

$$Tf := f(x_1)(\alpha_1 - \alpha_0) + f(x_2)(\alpha_2 - \alpha_1) + \cdots + f(x_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}),$$

wobei $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = 1$ die zu f gehörige Zerlegung ist und $x_j \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ für $j = 1, \ldots, n$ gilt. Bestimmen Sie die Operator-Norm von T, und zeigen Sie, dass T beschränkt bezüglich dieser Norm ist.

5. (Vortrag zu Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

(a) Sei X ein normierter Vektorraum. Beweisen Sie, dass der Raum $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ versehen mit der Operator-Norm vollständig ist.

(b) Sei (T_n) eine Folge in $\mathcal{L}(E, F)$, wobei E und F normierte Räume sind, und (x_n) eine Folge in E, die gegen x konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge $(T_n x_n)$ in F gegen Tx konvergiert.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis II (SoSe 2010)

Serie 6

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Vorlesung am 02.06.2010.

1. (2+3 Punkte) Berechnen Sie mit der Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert geeigneter Zerlegungssummen das Integral

$$\text{a)} \quad \int_0^a t \, \mathrm{d}t, \qquad\qquad \text{b)} \quad \int_a^b x^2 \, \mathrm{d}x$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$. Arbeiten Sie hierbei mit äquidistanten Zerlegungen.

2. (1+1+1+2 Punkte) Stammfunktionen können die Berechnung bestimmter Integrale, wie der in Aufgabe 1, erleichtern. Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ mit

$$\text{a)} \quad f(x) = \exp(-5x), \quad \text{b)} \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \quad \text{c)} \quad f(x) = \tan(x), \quad \text{d)} \quad f(x) = \cosh^2(x).$$

Hierbei bezeichnet I jeweils das maximale Definitionsintervall.

3. (2+3 Punkte) Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals

$$\text{a)} \quad \int_0^2 \sqrt{4 + x^2} \, \mathrm{d}x, \qquad\qquad \text{b)} \quad \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sin^4(x) \, \mathrm{d}x,$$

indem Sie zunächst eine Stammfunktion bestimmen und dann den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden.

4. (2+3 Punkte) Durch ein Rohr mit konstantem Durchschnitt strömt eine Flüssigkeit mit einer an jeder Stelle des Ausflussquerschnitts gleichen, aber zeitlich veränderlichen positiven Geschwindigkeit.

a) Drücken Sie das in einem Zeitraum endlicher Länge durch den Querschnitt strömende Flüssigkeitsvolumen durch ein bestimmtes Integral aus. Unter welchen Voraussetzungen ist dies möglich?

b) Modellieren Sie ein Beispiel, für welches das ausströmende Flüssigkeitsvolumen nicht mehr als 1l beträgt, egal welcher endliche Beobachtungszeitraum gewählt wird.

5. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung der folgenden Aufgabe in der Übung vortragen könnten:

Beweisen Sie für eine stetige Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ die Gültigkeit von

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^a [f(x) + f(-x)] \, \mathrm{d}x.$$

Welches Ergebnis erhält man, wenn f eine gerade bzw. ungerade Funktion ist?

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis II (SoSe 10)

Serie 7

Die Abgabe erfolgt zu Beginn der Vorlesung am 09.06.2010.

1. (6 Punkte) Gegeben sei eine auf $[0,1]$ definierte Funktionenfolge $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, deren Glieder durch $g_n(x) := \frac{[nx]^2}{n^2}$ bestimmt sind.

(a) Zeigen Sie, dass $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $[0,1] \ni x \to x^2 \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Verwenden Sie die Definition des Integrals einer Treppenfunktion, um das bestimmte Integral $\int_0^1 x^2 dx$ zu berechnen.

2. (4 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\text{a)} \int \frac{\ln x}{x} dx, \qquad \text{b)} \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx, \qquad \text{c)} \int \tan^2 x dx, \qquad \text{d)} \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Dabei ist anzugeben, auf welchen Intervallen die Integrale definiert sind.

3. (5 Punkte) Bestimmen Sie die nachstehenden unbestimmten Integrale. Auf welchen Intervallen sind diese definiert?

$$\text{a)} \int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x}, \qquad \text{b)} \int \frac{x^2+1}{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2} dx.$$

4. (5 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale, indem Sie diese durch geeignete Substitutionen auf Integrale über rationale Funktionen zurückführen:

$$\text{a)} \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx, \qquad \text{b)} \int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} dx, \qquad \text{c)} \int \frac{\ln^4 x - 1}{x(\ln^3 x + 1)} dx, \qquad \text{d)} \int \frac{dx}{4\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}.$$

5. (Vortrag zu Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

Die folgende Integrale können durch Anwendung der Produktintegration rekursiv berechnet werden. Leiten Sie die Rekursionsformel ab und bestimmen Sie damit das Integral für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 2$.

(a) $\int_0^\pi \sin^n(x) dx$,

(b) $\int_0^1 x^n \exp(-x) dx$.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis II (SoSe 2010)

Serie 8

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Vorlesung am 16.06.2010.

1. (1+1+2 Punkte) Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)} \quad \sum \exp(-k), \qquad \text{b)} \quad \sum \frac{1}{k^2+1}, \qquad \text{c)} \quad \sum \frac{1}{k \cdot (\ln(k))^a}, \ a \in (1, \infty).$$

2. (3+2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Zuordnung

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1).$$

b) Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar in $(0,0)$ bzw. $(1,1)$?

3. (2+2+2 Punkte) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix für

a) $f : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \left(\cos\left(x^2+y^2\right), \sin\left(x^2+y^2\right)\right) \in \mathbb{R}^2$.

b) $g : \mathbb{R}^3 \ni (u,v,w) \mapsto \left(w, u^2+v^2\right) \in \mathbb{R}^2$.

c) $h : \mathbb{R}^3 \ni (\theta, \varphi, r) \mapsto (r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta)) \in \mathbb{R}^3$.

4. (2+2+1 Punkte) Sei

$$f : \mathbb{R}^3 \supseteq M \ni (x,y,z) \mapsto \sqrt[5]{xyz(x+y+z)} \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich M und die Teilmenge $U \subseteq M$, auf welcher f partiell differenzierbar ist.

b) Ist f stetig differenzierbar auf U?

c) Ist f total differenzierbar auf U?

5. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

Bestimmen Sie $\operatorname{div}(f)$ für

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = \left(xy^4 + y^5, x^3y^2\right)$.

b) $f = \operatorname{grad}(g)$ mit

$$g : \mathbb{R}^3 \ni (s,t,r) \mapsto \sqrt[3]{s^4+t^4+r^4} \in \mathbb{R}.$$

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis II (SoSe 2010)

Serie 9

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Vorlesung am 23.06.2010.

1. (5 Punkte) Man zeige, dass das Integral $\int_0^\infty \sqrt{t}\cos(t^2)dt$ konvergiert. Damit wird insbesondere gezeigt, dass aus der Konvergenz von $\int_0^\infty f(x)dx$ nicht geschlossen werden kann, dass $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$ gilt.

2. (5 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \min\{0, x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von f für alle $x \in \mathbb{R}$ und Richtungen $h \in \mathbb{R}$.

3. (5 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & y > 0, \\ x, & y = 0, \\ -\sqrt{x^2+y^2}, & y < 0. \end{cases}$$

Man zeige:

(a) f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

(b) Jede Richtungsableitung von f existiert in $(0,0)$.

4. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) := x\,y\,\exp\left(x^2+y^2\right)$$

keine Extrema besitzt.

5. (Vortrag zu Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden zwei Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

Man berechne die Gradienten der Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(a) $u(x,y) := \frac{1}{r^2}\sin(x^3+y^4)$,

(b) $v(x,y) := \frac{1}{r^2}(\cos(x^3+y^4)-1)$

für $r = \sqrt{x^2+y^2} \neq 0$ und $u(0,0) := 0 =: v(0,0)$. Zu welcher Klasse $C^k(\mathbb{R}^2)$ mit maximalem k gehört u bzw. v?

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis II (SoSe 2010)

Serie 10

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Vorlesung am 30.06.2010.

1. (10 Punkte) Es seien $a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{10}, a_{01}, a_{00} \in \mathbb{R}$ mit

$$\{a_{20}, a_{11}, a_{02}\} \neq \{0\}.$$

Weiterhin sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{00}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie:

a) Ist $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} \neq 0$, so besitzt f höchstens ein Extremum.
b) Ist $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} > 0$, so besitzt f kein Extremum.
c) Ist $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} < 0$ und $a_{20} > 0$, so besitzt f ein strenges lokales Minimum.
d) Ist $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} < 0$ und $a_{20} < 0$, so besitzt f ein strenges lokales Maximum.
e) Ist $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} = 0$, so besitzt f kein Extremum oder es existiert ein Gerade $L \subseteq \mathbb{R}^2$ derart, dass
$$\operatorname{grad}(f)(x) = 0 \quad \forall x \in L. \tag{$\star$}$$
f) Ist umgekehrt $(\star)$ für eine Gerade $L \subseteq \mathbb{R}^2$ erfüllt, so besitzt f in jedem Punkt von L ein Extremum.

2. (5 Punkte) Bestimmen Sie alle Extrema von

$$f : (0, 3\pi) \times (0, 3\pi) \ni (x, y) \mapsto \sin(x + y) - \cos(x - y) \in \mathbb{R}.$$

3. (5 Punkte) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von

$$h : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \cos\left(x^3 + y^3\right) - \sin(x + y) + \cos(x + y) \in \mathbb{R}$$

in $(0, 0)$.

4. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung der folgenden Aufgabe in der Übung vortragen könnten:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine injektive lineare Abbildung und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung, welche $Df(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $(f \circ g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kein Extremum besitzt und geben Sie für $n = 2$ ein nicht-triviales Beispielpaar (f, g) solcher Funktionen an.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,
ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,
iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,
iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis II (SoSe 2010)

Serie 11

Die Abgabe erfolgt zu Beginn Ihrer Vorlesung am 07.07.2010.

1. (10 Punkte) Im Folgenden sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Relation $F(x, y) = 0$ durch eine Funktion $y(x)$ auf einem x_0 enthaltenden Intervall gelöst wird, wobei $F(x_0, y_0) = 0$, $y_0 = y(x_0)$ gilt. Leiten Sie eine allgemeine Formel für y' her.

(a) $F(x, y) = y^3 + y - x^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$

(b) $F(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3} - 4$, $(x_0, y_0) = (1, 3\sqrt{3})$

(c) $F(x, y) = xy + 2\ln x + 3\ln y - 1$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$

(d) $F(x, y) = \sin x + 2\cos y - \frac{1}{2}$, $(x_0, y_0) = (\pi/6, 3\pi/2)$

2. (6 Punkte) Im Folgenden sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf dem Gebiet D für

(a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2 \le x \le 4 \wedge -1 \le y \le 3\big\}$,

(b) $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x$, $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le 3 \wedge |y| \le 2\big\}$,

(c) $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$, D bezeichnet hier das Dreieck mit den Eckpunkten $(1, 2)$, $(1, -2)$, und $(-1, -2)$.

3. (4 Punkte) Eine ovale Scheibe wird durch die Gleichung $4x^2 + y^2 \le 4$ beschrieben. Die Scheibe wird – mitsamt ihrem Rand – erhitzt, so dass in jedem Punkt (x, y) die Temperatur gleich $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x$ ist. Finden Sie den wärmsten sowie den kühlsten Punkt auf dieser Scheibe und berechnen Sie die Temperatur in diesen Punkten.

4. (Vortrag zur Erlangung von Bonuspunkten) Bereiten Sie sich, wenn Sie möchten, so vor, dass Sie die Lösung einer der folgenden Aufgaben in der Übung vortragen könnten:

Es sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Man finde alle Punkte in $\mathrm{dom}(g)$, für welche der Satz der Umkehrabbildung anwendbar ist, und bestimme die Ableitung von g^{-1} in einer Umgebung dieser Punkte.

(a) $g(x, y) = (x + 2y, x - y)$

(b) $g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass maximal zwei Studenten eine Serie zusammen abgeben dürfen,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben Analysis II (SS 10)

Serie 12

Begründen Sie jede Ihrer Antworten ausführlich und mathematisch rigoros. Die Auswahl von drei Aufgaben aus 1-3, 6-7 und einer Aufgabe aus 4-5 sollten Sie im Zeitrahmen der Klausur lösen können.

---

1. (a) Bestimmen Sie mit Hilfe geeigneter Substitution die Stammfunktion des unbestimmten Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}.$$

(b) Es sei $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Verifizieren Sie

$$\int_0^\pi x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

2. (a) Weisen Sie die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_1^\infty \frac{\sin(1/x)}{x}dx$$

nach.

(b) Bestimmen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}dx.$$

3. (a) Gegeben seien

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \mapsto (y^2, xy, x^2y),$$
$$g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2, \quad (a,b,c) \mapsto (\cos b, \sin(abc)).$$

Bestimmen Sie die Jacobimatrix von $g \circ f$.

(b) Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy/\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung $D_v f(0,0)$ nicht existiert für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{e_1, e_2\}$, wobei e_i der i-te kanonische Basisvektor von $\mathbb{R}^2$ sei.

4. Es seien E und F Banachräume über dem Körper $\mathbb{K}$. Die Funktion $f : E \to F$ heißt positiv homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn gilt: $f(tx) = t^\alpha f(x)$, $t > 0$, $x \in E \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Ist $f \in C^1(E,F)$ positiv homogen vom Grad 1, so gilt $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

5. Zeigen Sie: Für $f \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ und $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\nabla(f \circ A)(x) = A^* \nabla f(Ax),$$

wobei $A^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ erfüllt, dass $(Ax|y) = (x|A^*y)$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$.

6. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u^2 - v &= 0, \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 &= 1 \end{aligned}$$

in der Nähe von $(1/2, 0, 1/2, 0)$ nach (u, v) aufgelöst werden kann. Bestimmen Sie die ersten Ableitungen von u und v bzgl. (x, y).

7. Bestimmen Sie die extremalen Werte der Funktion $f(x, y) = xy^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$.
