Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 1. Übungsserie – Analysis II **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 19.4.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11s/an.html

---

1. Man bestimme Lage und Art der relativen Extremwerte der Funktion $f(x,y)$ und gebe die zugehörigen Funktionswerte an.

   $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x + 5y$ (6)

2. Berechnen Sie folgende unbestimmten Integrale:

   a) $\int e^x sinx\ dx$ (3)

   b) $\int sinxcosx\ dx$ (3)

   c) $\int xsin^2x\ dx$ (4)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 2. Übungsserie – Analysis II **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 3.5.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11s/an.html

---

1. Es sei

$$f(t) = \begin{cases} 3t & \text{für} \quad 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{für} \quad 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \quad .$$

Begründen Sie, warum $f(t)$ auf dem Intervall $[0,2]$ integrierbar ist (1)
und berechnen Sie

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \qquad , \text{für } x \in [0,2] \quad . \tag{2}$$

Geben Sie eine graphische Darstellung von $f(t)$ und $F(x)$ im Intervall $[0,2]$ an! (2)

2. Berechnen Sie mittels partieller Integration folgende Integrale:

a) $\int_1^2 x^9 lnx dx$ (3) b) $\int_0^1 arctanx dx$ (3)

3. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß der Wert des Integrals

$$\int_1^3 \sqrt{9x^2 - 36x + 52} dx \tag{3}$$

zwischen 8 und 10 liegt!

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 3. Übungsserie – Analysis II **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 10.5.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11s/an.html

---

1. Berechnen Sie!

a) $\int\limits_0^1 x(1+x^2)^{10}dx$ (2) b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{1+sin^2x}dx$ (2)

2. Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das von der x-Achse und dem Bild der Funktion f begrenzt wird, wobei $f(x) = (x - x^2)e^x$ ist! (4)

3. Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale!

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi} sin(2x+y)dxdy$ (3) b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x+y} sin(x+y)dxdy$ (4)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 4. Übungsserie – Analysis II **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 17.5.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11s/an.html

---

1. Es sei $f : M \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^*$. Zeigen Sie:
   a) Ist f meßbar, so ist $\{x \in M : \ \mid f(x) \mid = +\infty\}$ meßbar. (3)
   b) f ist meßbar genau dann, wenn f^+ und f^- meßbar sind. (4)

2. Berechnen Sie!

   a) $\int\limits_3^8 \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx$ (3) b) $\int\limits_0^2 \frac{1}{e^x+e^{-x}+2} dx$ (3)

3. Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion $g(s)$. Daraus ergibt sich eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x,y) = g(s)$, wobei $s = \sqrt{x^2+y^2}$ist.

   Man zeige: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{d^2 g}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dg}{ds}$ (4)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 5. Übungsserie – Analysis II **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 24.5.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11s/an.html

---

1. Berechnen Sie durch vollständige Induktion über n :

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n dt \quad . \qquad (5)$$

2. Berechnen Sie :

a) $\int_1^\infty \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} dx$ (4) b) $\int_e^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$ (3) .

3. Sei $c > 0$ eine Konstante und $u = \sin(x + ct) + \cos(x - ct)$.

Man zeige: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ (3)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 6. Übungsserie – Analysis II **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 31.5.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11s/an.html

---

1. Von den folgenden Parameterintegralen ist die erste Ableitung nach dem Parameter t in integralfreier Gestalt anzugeben:

   a) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(x+t)}{x+1} dx$ (3) b) $\int\limits_1^2 \frac{sinh(2t-tx)}{x-2} dx$ (2)

2. Sei $u(x,y)$ stetig differenzierbar und erfülle die Gleichung $x - u(x,y) = e^{y+u(x,y)}$.
   Man zeige: $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 1$ (3)

3. a) Bestimmen Sie alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $u(x,y)$, die Lösung der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$ sind. (5)

   b) Sei $u(x,y)$ eine derartige Lösung aus Teil a) und c eine positive Konstante.
   Zeigen Sie: $v(s,t) := u(x,y)$, wobei $x = s + ct$ und $y = s - ct$, ist eine Lösung der

   homogenen Wellengleichung $\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$ (4)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 7. Übungsserie – Analysis II **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 7.6.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11s/an.html

---

1. Berechnen Sie folgendes Flächenintegral:

$$\int_{\Omega}(2x-y)d\mu$$

Ω wird durch $x=\frac{y^2}{4}$ und $y=2x-24$ begrenzt. (4)

2. Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale!

a) $\int_1^2\int_0^{y+1} xlnydxdy$ (4) b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\sqrt{sin2t}} rdrdt$ $a>0$ (4)

3. Die Abbildung $g(r,\phi): M\subseteq \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ mit den Komponenten $x=r\cos\phi$ und $y=r\sin\phi$ ist auf $M=\{(r,\phi)\in\mathbf{R}^2: 0<r<1;\ 0<\phi<2\pi\}$ eineindeutig und stetig differenzierbar. Man bestimme

a) die Ableitung $g'=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)}$ (Jacobi-Matrix) und (2)

b)die partiellen Ableitungen $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \phi}{\partial y}$. (3)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 8. Übungsserie – Analysis II **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 14.6.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11s/an.html

---

1. Man bestimme die Masse desjenigen Körpers, der von den Flächen $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ und $x - y - z = 0$ mit $z \geq 0$ begrenzt wird.
   Für die Dichte ρ gelte: $\rho(x, y, z) = 3(x^2 + y^2)z$. (6)

2. Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion $f(x, y)$. Daraus ergibt sich eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $g(r, \phi) = f(x, y)$, wobei $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ ist.

   Man zeige: $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (3)

3. Man bestimme die relativen Extremwerte der Funktion $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ auf der durch $g(x, y) = 0$ definierten Mannigfaltigkeit, wobei $g(x, y) = x - y^2 + 1$ ist. (4)
   Man benutze die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 9. Übungsserie – Analysis II **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 21.6.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11s/an.html

---

1. Man bestimme das Volumen V des Körpers, der unten von der $x-y-$Ebene, seitlich von den Ebenen $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ und von oben von dem elliptischen Paraboloid $z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \qquad p, q > 0$ begrenzt wird. (5)

2. Man bestimme sowohl den kleinsten als auch den größten Wert den die Funktion $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ auf der durch $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gegebenen Kugeloberfläche annimmt und gebe die Stellen an, an denen die Extremwerte angenommen werden. (6)

3. Man berechne die Länge folgender Kurven:

   a) $x = e^t cost, \quad y = e^t sint, \quad z = e^t, \qquad 0 \leq t \leq b$ (3)

   b) $x = 2a^2 t, \quad y = 3abt^2, \quad z = 3b^2 t^3, \qquad 0 \leq t \leq c$ (3)

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 10. Übungsserie – Analysis II **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 28.6.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11s/an.html

---

1. Gesucht sind der höchste und der tiefste Punkt der Schnittkurve, die entsteht, wenn das elliptische Paraboloid $z = x^2 + 4y^2$ von der Ebene $4x - 8y - z + 24 = 0$ geschnitten wird. (6)

2. S^2 sei im $\mathbf{R}^3$ die Kugel um den Koordinatenursprung mit dem Radius 1 und $\mathfrak{c}$ der Breitenkreis 45° nördliche Breite (mit üblicher Orientierung). Man berechne das Kurvenintegral

$$\int_{\mathfrak{c}} ye^z dx + xe^z dy + e^x z^3 dz. \qquad (5)$$

3. Es ist der Flächeninhalt der Fläche gesucht, deren Punkte (x, y, z) den folgenden Bedingungen genügen:

$$4 \leq x \leq 5, \quad 2 \leq y \leq \tfrac{x}{2}, \quad z = -2x + y - 2 \qquad (4)$$

Humboldt–Universität
Institut für Mathematik

** 11. Übungsserie – Analysis II **

Vorlesung: Dr. Tuschik **Abgabetermin: 5.7.2011**

....

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~tuschik/math/an11s/an.html

---

1. Man berechne das folgende Kurvenintegral:

$$\int_\Gamma y^3 dx + (x-y)dy + x^3 dz \quad , \tag{4}$$

wobei Γ der Polygonzug ist, der die Punkte $(0,0,0), (0,1,0), (0,1,1)$ und $(1,1,1)$ miteinander verbindet.

2. Man stelle die 2-form $\sigma\wedge\tau$ durch die Basisdifferentialformen $dx\wedge dy$, $dz\wedge dx$, und $dy\wedge dz$ dar, wobei σ und τ die folgenden Differentialformen sind:

a) $\sigma = y^2 dx + zx dy + y dz$ und $\tau = 2x dx + y dy - xy dz$ (3)

b) $\sigma = z dx + (x^2 - y^2) dz$ und $\tau = x^2 y dx + z^2 dy - 3y^2 z dz$. (3)

3. Gegeben sei die 2-Form $\omega = xy\ dy\wedge dz + 3y^2\ dz\wedge dx - 4xz\ dx\wedge dy$. Berechnen Sie den Wert von $\omega(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ für die Vektorfelder

$$\mathfrak{X} = 2xz\partial_x + 3z\partial_y - yz\partial_z \quad \text{und} \quad \mathfrak{Y} = 3\partial_x + 5y^3 x\partial_y - xyz\partial_z \quad . \tag{4}$$