Übungsaufgaben zu Analysis II, Serie 1

Sommersemester 2012

zur Vorlesung von Prof. Sprekels

1.1.

a) Sei $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = \arctan(nx)$. Man zeige, dass $\{f_n\}$ punktweise gegen eine Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert, aber nicht gleichmäßig. (2 Pkte)

b) Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = \int\limits_0^1 e^{x^2 t} \sin(nt)\, dt$. Man zeige, dass $\{f_n\}$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen die Nullfunktion konvergiert. (3 Pkte)

1.2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2} e^{-x/n}$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\{f_n\}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}_+$ gegen die Nullfunktion konvergiert, aber dass

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty f_n(x)\, dx = 1 .$$

Warum ist dies kein Widerspruch zu Satz 24.4 aus der Analysis I? (4 Pkte)

1.3.

a) Sei $f \in C^4[a,b]$, $a < x < b$. Sei $h > 0$ so, dass $x \pm h \in [a,b]$.

Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass gilt

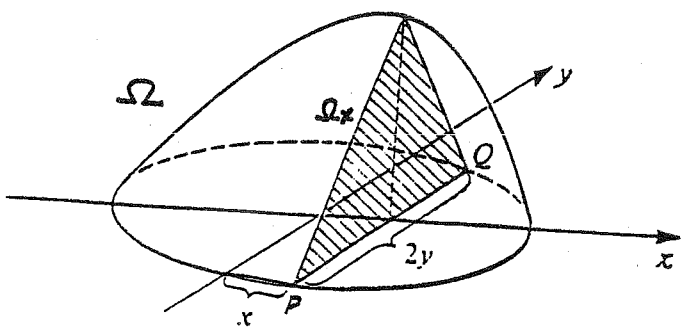
$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \le C h^2 .$$

(Hinweis: Taylorentwicklung!) (3 Pkte)

b) Man bestimme das Taylorpolynom dritten Grades und das zugehörige Lagrange'sche Restglied der Entwicklung der Funktion

$f(x) = e^{\cos(x)}$, $x \in \mathbb{R}$, um $a = 0$. (3 Pkte)

1.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ diejenige Menge, deren „Basis" in der $x-y-$ Ebene durch die Ellipse $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$, $a > 0$, $b > 0$, gegeben ist, und deren „Querschnitt" Ω_x für $-a \le x \le a$ durch das gleichseitige Dreieck mit der Seitenlänge $\overline{PQ}$ gegeben ist (vgl. beigefügte Skizze). Man bestimme $V(\Omega)$.



(4 Pkte)

Abzugeben in der Woche 16.4.–18.4.2012

$\sum = 19$ Pkte

Übungsaufgaben zu Analysis II, Serie 2

Sommersemester 2012

zur Vorlesung von Prof. Sprekels

2.1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen d Metriken auf den entsprechenden Mengen X sind:

a) $X = \mathbb{R}, \quad d(x,y) := |e^x - e^y|$ (2 Pkte)

b) $X = C[a,b], \quad d(f,g) := \int\limits_a^b \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,dx$ (4 Pkte)

c) $X = C[a,b], \quad d(f,g) := |f(a)-g(a)|$ (1 Pkt)

d) $X = \mathbb{R}^2, \quad d(x,y) := |x_1 - y_1|$ (1 Pkt)

e) $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad d(x,y) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|}$ (4 Pkte)

f) $X = \mathbb{N}, \quad d(n,m) := \begin{cases} 0\,, \text{falls } n = m \\ 1 + \frac{1}{n+m}\,, \text{ sonst} \end{cases}$ (2 Pkte)

2.2. Sei P die Menge aller Polynome auf $\mathbb{R}$ mit reellen Koeffizienten. Wir definieren

$$X := \{u \in C(\mathbb{R}) \,:\, u(x) = p(x)\,e^{-x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, p \in P\}.$$

a) Man zeige, dass X ein unendlich-dimensionaler Teilvektorraum von $C(\mathbb{R})$ ist. (4 Pkte)

b) Bestimmen Sie den Abstand $\|f-g\|_{\mathbb{R}}$ der Funktionen $f(x) = (3x-1)\,e^{-x^2}\,,\ g(x) = (2x-1)\,e^{-x^2}$. (2 Pkte)

2.3. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $\{x_n\}$ im normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ für

a) $X = \mathbb{R}^3, \ \|\cdot\| = \|\cdot\|_2\,, \ x_n = \left(e^{-n}\,, \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{5^k}{k!}\,, \tan\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$ (2 Pkte)

b) $X = C[0,1], \ \|\cdot\| = \|\cdot\|_{[0,1]}\,, \ x_n(t) = t^2\,e^{-nt}$ für $t \in [0,1]$. (2 Pkte)

$\sum$ 24 Pkte

Abzugeben in der Woche 23.4.–25.4.2012

Übungsaufgaben zu Analysis II, Serie 3

Sommersemester 2012

zur Vorlesung von Prof. Sprekels

3.1. Sei $X = C[0,1]$, $\|f\| := \int_0^1 |f(x)|\,dx$.

a) Man zeige, dass $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist. (2 Pkte)

b) Sei die Folge $\{f_n\} \in C[0,1]$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x \le 1/2\,, \\ 2^n(1-x)^n & , \quad 1/2 < x \le 1\,. \end{cases} \qquad \text{Man zeige:}$$

Für alle $n, p \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\|f_n - f_{n+p}\| \le \dfrac{1}{2(n+1)}$. (4 Pkte)

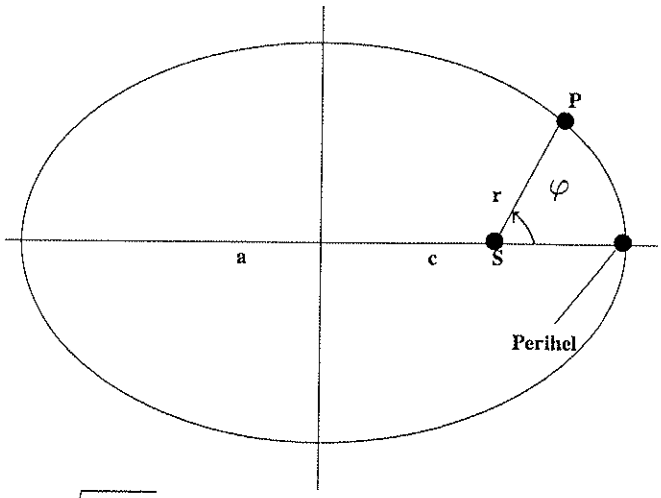
c) Man zeige: $(X, \|\cdot\|)$ ist nicht vollständig. (4 Pkte)

3.2. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(X, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $A : X \to Y$ eine lineare und auf X stetige Abbildung. Man zeige:

a) Es existiert $\|A\| := \sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \neq \theta}} \dfrac{\|A\,x\|_Y}{\|x\|_X}$. (3 Pkte)

b) Durch $\|\cdot\|$ ist auf dem Vektorraum $\mathcal{L}(X,Y)$ der linearen und stetigen Abbildungen von X nach Y eine Norm definiert. (4 Pkte)

3.3. Seien $P = (r, \varphi)$ die Polarkoordinaten bezüglich der in einem Brennpunkt der Umlaufellipse eines Planeten befindlichen Sonne. Sind $a > 0$ die große Halbachse und $e = \frac{c}{a}$ die „numerische Exzentrizität" der Bahnellipse, so ergeben sich r und φ gemäß



$$r = a(1 - e\cos(E)), \quad \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right).$$

Dabei ergibt sich die „exzentrische Anomalie" E aus der „Kepler-Gleichung"

$$\frac{2\pi}{U}t = E - e\sin(E),$$

wobei U die Umlaufzeit und t die seit dem letzten Periheldurchgang vergangene Zeit sind. Für den Planeten Jupiter gelten die Daten: $a = 778$ Mio km, $U = 11,862$ Jahre, $e = 0,048$. Man berechne mit Hilfe des Kontraktionssatzes, an welcher Stelle sich der Jupiter zwei Jahre nach dem Periheldurchgang befindet. Rechnen Sie auf 10^{-5} genau. (6 Pkte)

$\sum$ 23 Pkte

Abzugeben in der Woche 30.4.–2.5.2012

Übungsaufgaben zu Analysis II, Serie 4

Sommersemester 2012

zur Vorlesung von Prof. Sprekels

4.1. Seien (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Man zeige:

a) Die Menge $M := \{x \in X : d(x, a) > \varepsilon\}$ ist offen. (1 Pkt)

b) $\partial K_\varepsilon(a) \subset S_\varepsilon(a)$, wobei $S_\varepsilon(a) := \{x \in X : d(x, a) = \varepsilon\}$ die „ε-Sphäre um a“ ist. (3 Pkte)

c*) Seien $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $d(x, y) = ||x - y||$.
Dann gilt $\partial K_\varepsilon(a) = S_\varepsilon(a)$. (4 Pkte*)

4.2. Man zeige die folgenden Aussagen:

a) Seien (X, d) ein metrischer Raum und $f \in C(X)$.
Dann ist $M := \{x \in X : f(x) < 1\}$ offen. (2 Pkte)

b) Seien $f, g \in C[a, b]$ mit $f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$.
Dann ist $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ abgeschlossen in $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$. (2 Pkte)

4.3. Sei $X = C[0, 1]$ versehen mit der Maximum-Norm $||f||_{[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$, und sei M die beschränkte Menge $M := \{f \in C[0, 1] : ||f||_{[0,1]} \leq 1, f(0) = 1\}$.

a) Man zeige, dass M abgeschlossen ist. (2 Pkte)

b*) Man zeige, dass M nicht kompakt ist. (3 Pkte*)

c) Die Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(f) := \int_0^1 (f(x))^2 dx$. Man zeige:

(i) F ist stetig auf X. (4 Pkte)

(ii) $\inf \{F(f) : f \in M\} = 0$. (2 Pkte)

(iii) F besitzt auf M kein Minimum. (2 Pkte)

$\sum$ 18 Pkte

+ 7 Extra-Pkte

Abzugeben am 7.5.2012

Übungsaufgaben zu Analysis II, Serie 5

Sommersemester 2012

zur Vorlesung von Prof. Sprekels

5.1. Gegeben sei die Kurve $r : I\!R \to I\!R^2$ („Logarithmische Spirale“) gemäß

(1) $\qquad r(t) := (e^{-ct}\cos(t)),\ e^{-ct}\sin(t)),\ t \in I\!R$, mit festem $c > 0$.

a) Zeigen Sie, dass r eine glatte Kurve ist, und geben Sie den Tangentialvektor für alle $t \in I\!R$ an. (3 Pkte)

b) Berechnen Sie die Bogenlänge $\sigma(t)$ von $r_{|[0,t]}$ sowie $\lim\limits_{t\to+\infty} \sigma(t)$. (3 Pkte)

c) Geben Sie für die Kurve $r_{|[0,t]}$ die natürliche Parametrisierung an. (3 Pkte)

d) Berechnen Sie die Krümmung der Kurve $r_{|[0,t]}$ in jedem Punkt ihrer Spur. (4 Pkte)

e) Zeigen Sie, dass die Kurve (1) jede Kreislinie um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet und berechnen Sie den Cosinus des Schnittwinkels. (3 Pkte)

5.2.

a) Sei $u(x,t) := t^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\dfrac{\|x\|_2^2}{4t}\right)$ für $(x,t) \in I\!R^m \times I\!R_+^*$. Zeigen Sie, dass u in $I\!R^m \times I\!R_+^*$ die Wärmeleitungsgleichung $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ löst. (4 Pkte)

b) Man zeige, dass die Funktion $u(x,t) := \varphi(x - c\,t) + \psi(x + c\,t)$ für $(x,t) \in I\!R^2$ die (eindimensionale) Wellengleichung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ löst, wobei $\varphi, \psi \in C^2(I\!R)$ und $c > 0$ gegeben seien. (2 Pkte)

5.3.* Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin\left(\frac{1}{y}\right) & , \quad \text{für } xy \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{für } xy = 0 \end{cases} .$$

a) In welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist f stetig? (3 Pkte*)

b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ dort, wo sie existieren. (6 Pkte*)

c) Ist $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ in $(0,0)$ stetig? (2 Pkte*)

d) Ist $\dfrac{\partial f}{\partial y} : D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\,,\, y = 0\} \to \mathbb{R}$ in $(0,0)$ stetig? (2 Pkte*)

$\sum$ 22 Pkte

$+$ 13 Extra-Pkte

Abzugeben am 14.5.2012

Übungsaufgaben zu Analysis II, Serie 6

Sommersemester 2012

zur Vorlesung von Prof. Sprekels

6.1. Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar.

Man rechne nach, dass folgende Formeln der Vektoranalysis gelten:

a) div rot $F = 0$ (3 Pkte)

b) rot rot $F =$ grad div $F - G$, wobei $G := (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$ (4 Pkte)

c) rot $(f\,F) = F \times$ grad $f + f$ rot F (3 Pkte)

6.2. Betrachte die Wellengleichung in $\mathbb{R}^m$:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\,\Delta f = 0$. Sei $g \in C^2(\mathbb{R})$ gegeben.

a) Seien $k \in \mathbb{R}^m$, $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\omega = c\,\|k\|_2$. Dann ist $f(x,t) = g(k \cdot x - \omega\,t)$

Lösung der Wellengleichung („ebene Welle“). (3 Pkte)

b) Seien $m = 3$ und $\rho(x) = \|x\|_2$. Dann ist $f(x,t) = \dfrac{1}{\rho(x)}\,g\,(\rho(x) - c\,t)$

Lösung der Wellengleichung („Kugelwelle“). (5 Pkte)

6.3.* Es seien $X := \mathbb{R}, d(x,y) := |x-y|$ sowie

$f(x) := \begin{cases} x + e^{\frac{-x}{2}} & \text{für } x \geq 0 \\ e^{\frac{x}{2}} & \text{für } x < 0 \end{cases}$. Man zeige:

a) $\forall\, x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt: $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. (4 Pkte*)

b) f besitzt keinen Fixpunkt in $\mathbb{R}$ (2 Pkte*)

$\sum$ 18 Pkte

+6 Extra-Pkte

Abzugeben am 21.5.2012

Übungsaufgaben zu Analysis II, Serie 7

Sommersemester 2012

zur Vorlesung von Prof. Sprekels

7.1. Seien $\Omega \subset I\!R^2$ offen und $u \in C^4(\overline{\Omega})$. Ferner seien $(x,y) \in \Omega$ und $h \neq 0$ so gewählt, dass $(x \pm h, y)$, $(x, y \pm h) \in \Omega$. Dann gibt es eine nur von u abhängige Konstante $C > 0$, so dass gilt:

$$\left| \Delta u(x,y) - \frac{u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h) - 4u(x,y)}{h^2} \right| \leq C\, h^2. \qquad \text{(4 Pkte)}$$

7.2. Man beweise Satz 7.4 im Skript, S. 64. (4 Pkte)

7.3. Sei $F : I\!R^3 \to I\!R^3$,

$$F(x_1,x_2,x_3) = \left(e^{x_1} \cos(x_2)\,,\ \sin(x_3 \cos(x_2))\,,\ \int_0^{\cos(x_1 \cdot x_2)} \arctan(t)\, dt \right).$$

Man bestimme:

a) div $F(x_1,x_2,x_3)$, (2 Pkte)

b) rot $F(x_1,x_2,x_3)$, (3 Pkte)

c) die Fréchet-Ableitung von F im Punkte $(0, \pi, \frac{\pi}{2})$. (3 Pkte)

7.4.* Man betrachte im $I\!R^2$ die Potentialgleichung $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $(x,y) \in I\!R^2$. Man zeige, dass die Gleichung $\Delta u = 0$ durch die Transformation in Polarkoordinaten (r,φ), $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, für $r \neq 0$ übergeht in $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$.

(Hinweis: Kettenregel der Differentiation!) (6 Pkte*)

$\sum$ 16 Pkte

+ 6 Extra-Pkte

Abzugeben am 29.5.2012

Übungsaufgaben zu Analysis II, Serie 8

Sommersemester 2012

zur Vorlesung von Prof. Sprekels

8.1.

a) Man zeige, dass für $m \geq 3$ jedes Zentralfeld

$$F(x) = c\,\frac{x}{\|x\|_2^m}\,, \quad x \neq \Theta\,, \quad c \in I\!R\,,$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential f für F.
(Ansatz: $f(x) = g(\rho(x))$ mit $\rho(x) = \|x\|_2$ und $g \in C^1(0,\infty)$). (4 Pkte)

b) Man bestimme die Arbeit, die verrichtet werden muss, um eine Sonde der Masse 1000 kg im Schwerefeld der Sonne von der Höhe der Erdbahn ins Unendliche zu bewegen (längs einer geeignet gewählten glatten Kurve r).
Daten:
$M =$ Masse der Sonne $= 2.0 \times 10^{33}\,g$
a = Radius der Erdbahn $= 149.5 \times 10^6\,km$
γ = Gravitationskonstante $= 6.67 \times 10^{-8}\,g^{-1}\,\mathrm{sec}^{-2}\,cm^3$. (5 Pkte)

8.2. Sei $f : I\!R^3 \to I\!R\,, \quad f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{4} + x_3^2\,.$

a) Man bestimme die Richtungsableitung von f in $x = (2,1,0)$ in Richtung des Vektors $v = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(1,0,2)$. (2 Pkte)

b) Man bestimme die Tangentialebene an die Niveaufläche $N_f(3)$ im Punkte $a = (1,2,1) \in N_f(3)$. (2 Pkte)

8.3.* Wir betrachten für $x \in [0,\infty)\,, \quad y_0 \in I\!R\,, \quad a \in C[0,\infty)$ die „lineare Anfangswertaufgabe“

$$(1)\ \ y'(x) = \alpha(x)\,y(x)\,, \quad 0 \leq x < +\infty$$
$$(2)\ \ y(0) = y_0\,.$$

Man zeige, dass die Anfangswertaufgabe genau eine Lösung $y \in C^1[0,\infty)$ besitzt, und man bestimme diese.
(Hinweis: Multipliziere (1) mit $\exp(-\int_0^x a(t)\,dt)$.) (6 Pkte*)

8.4.* Im Punkte $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ sei eine Heizung aufgestellt, die die Temperaturverteilung $T(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{2}\,y^2)$ zur Folge habe. Ein Insekt, das durch die Wärme angezogen wird, befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkte $(1, \frac{1}{2})$ in Ruhelage. Wie sieht die Bahnkurve aus, auf der sich das Insekt auf den Ursprung zubewegt? (8 Pkte*)

$\sum$ 13 Pkte

$+$ 14 Extra-Pkte

Abzugeben am 4.6.2012

Übungsaufgaben zu Analysis II, Serie 9

Sommersemester 2012

zur Vorlesung von Prof. Sprekels

9.1. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale $\int\limits_T F(x) \cdot dx$, wobei die angegebenen Kurven in Richtung des Parameterwachstums durchlaufen werden.

a) $F(x) = (2\,a - x_2, x_1) \quad \forall\ (x_1, x_2) \in I\!R^2$,

$r(t) = (a(t - \sin(t))\,,\ a\,(1 - \cos(t)))\,, \quad t \in [0, 2\pi]\,, \quad a > 0 \quad$ (Zykloide) (3 Pkte)

b) $F(x) = (x_2^2, x_1^2) \quad \forall\ (x_1, x_2) \in I\!R^2$,

1) $r(t) = (a\,\cos(t)\,,\ b\,\sin(t))\,, \quad t \in [0, \pi]\,, \quad 0 < b < a\,.$ (3 Pkte)

2) $r(t) = (a\,\cos(t)\,,\ b\,\sin(t))\,, \quad t \in [0, 2\pi]\,, \quad 0 < b < a\,.$ (2 Pkte)

c) $F(x) = (x_2, x_1) \quad \forall\ (x_1, x_2) \in I\!R^2$,

$r(t) = \left(t, \sqrt{1 - (t-1)^2}\right)\,, \quad t \in [0, 1]\,.$ (2 Pkte)

d) $F(x) = \left(\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \dfrac{1}{x_3}\right) \quad \forall\ x \in \Omega = \left\{x \in I\!R^3 : x_i > 0\,,\ i = 1, 2, 3\right\}$,

die Spur der glatten Kurve r verlaufe in Ω und verbinde den Anfangspunkt (1,1,1) mit dem Endpunkt $(a, b, \frac{1}{ab})$, $a \neq 0 \neq b$. (2 Pkte)

9.2. Man bestimme alle Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion

$f(x_1, x_2) = x_1^4 - 8\,x_1 + (x_1 - 1)(x_2 - 2)^2\,.$ (4 Pkte)

9.3 Man bestimme den Maximal- und den Minimalwert der Funktion

$f : I\!R^2 \to I\!R\,, \quad f(x_1, x_2) = 4\,x_1^2 - 3\,x_1\,x_2$ im Einheitskreis

$\{(x_1, x_2) \in I\!R : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ im $I\!R^2$.

(Hinweis: Man berechne die lokalen Extrema im Inneren und auf dem Rand getrennt.) (6 Pkte)

$\sum$ 22 Pkte

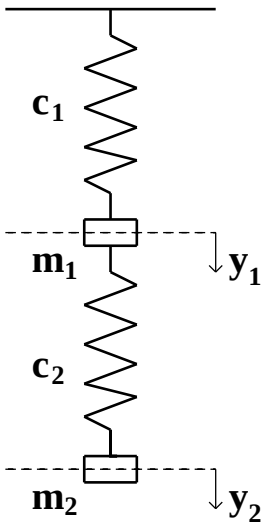
Abzugeben am 11.6.2012

Übungsaufgaben zu Analysis II, Serie 10

Sommersemester 2012

zur Vorlesung von Prof. Sprekels

10.1. Zwei Massen m_1 und m_2 seien gekoppelt an zwei Federn mit den Federkonstanten c_1 und c_2 aufgehängt und schwingen in vertikaler Richtung jeweils um eine Ruhelage.



Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_1\, y_1'' \,+\, c_1\, y_1 \,-\, c_2(y_2 - y_1) \;=\; 0$$
$$m_2\, y_2'' \,+\, c_2\,(y_2 - y_1) \;=\; 0$$

Sei speziell $m_1 \,=\, m_2 \,=\, m \,>\, 0\,,$ $c_1 \,=\, c_2 \,=\, c \,>\, 0\,.$

a) Für welche $\alpha > 0$ besitzt das System eine von Null verschiedene Lösung der Gestalt

$$y_1(t) = A\,\sin(\alpha t) + B\,\cos(\alpha t)\,, \quad y_2(t) = C\,\sin(\alpha t) + D\,\cos(\alpha t)$$

mit $A, B, C, D \in I\!R$? (6 Pkte)

b) Die erste Bewegungsgleichung werde ersetzt durch

$$m y_1'' \,+\, c\, y_1 \,-\, c\,(y_2 - y_1) \,=\, G\,\sin(\omega t)\,, \quad G \neq 0\,,$$

(d. h. auf m_1 wirkt eine periodische äußere Kraft). Für welche $\omega > 0$ besitzt das System dann eine von Null verschiedene Lösung der Gestalt

$$y_1(t) \,=\, A\,\sin(\omega t) \,+\, B\,\cos(\omega t)\,, \quad y_2(t) \,=\, C\,\sin(\omega t) \,+\, D\,\cos(\omega t)\,?$$

Gibt es eine Periode ω, für die die angeregte Masse m_1 in Ruhe bleibt, aber die Masse m_2 schwingt? Wann tritt eine Resonanzkatastrophe ein? (6 Pkte)

10.2. Sei $f \in C(\mathbb{R})$. Man betrachte die Differentialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x > 0\,. \qquad (*)$$

a) Man zeige: Wenn u für ein $a > 0$ eine Lösung der Differentialgleichung mit getrennten Variablen $u' = \dfrac{f(u) - u}{x}$ in $(0, a)$ ist, dann ist $y(x) = x\,u(x)$ eine Lösung von (*) in $(0, a)$. (2 Pkte)

b) Man bestimme eine Lösung y der Anfangswertaufgabe

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}, \quad 1 < x < a\,, \quad y(1) = 1\,,$$

wobei $a > 1$ geeignet gewählt werde. (4 Pkte)

10.3.

a) Man bestimme zwei verschiedene Lösungen der Anfangswertaufgabe

$y' = 3\,y^{2/3}$, für $x \geq 0$, $y(0) = 0$. (4 Pkte)

b) Warum widerspricht die Tatsache, dass es zwei verschiedene Lösungen gibt, nicht dem Satz von Picard-Lindelöf? (2 Pkte)

$\sum$ 24 Pkte

Abzugeben am 18.6.2012