HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 15.04.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 1

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 22.04.-28.04.2013

---

1. **Umkehrabbildungen [6 P]:** Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung. Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Abbildung $g : B \to A$ existiert, die

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A, \quad f \circ g = \mathrm{Id}_B$$

erfüllt. Wir nennen g die *Umkehrabbildung* von f und notieren sie mit f^{-1}.

2. **Permutationen [4 P]:** Beweisen Sie:

Die Anzahl der Permutationen $n \in \mathbb{N}$ verschiedener Elemente ist $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

3. **Körpereigenschaften [1+1+1+1+1+1 P]:** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper. Beweisen Sie, dass folgende Eigenschaften gelten:

   a) $1 \in \mathbb{K}$ ist eindeutig bestimmt,
   b) $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $x \neq 0$ ist $x^{-1} \in \mathbb{K}$ eindeutig bestimmt,
   c) $a \cdot x = b$ besitzt $\forall a, b \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0$ die eindeutig bestimmte Lösung $x = a^{-1} \cdot b$,
   d) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K}$,
   e) $-x = (-1) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{K}$,
   f) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 22.04.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 2

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 29.04.-05.05.2013

---

4. **Kubikzahlen [4 P]:** Beweisen Sie, dass die Summe der ersten $n \in \mathbb{N}$ natürlichen Kubikzahlen gleich dem Quadrat der Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist,

$$1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

5. **Dreiecksungleichung [4 P]:** Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ beliebige reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die folgende Dreiecksungleichung gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

6. **Die metrischen Axiome [2+2+2 P]:** Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Der Abstand zwischen den Zahlen x und y ist

$$\left| x - y \right| =: d(x, y).$$

Die Abbildung $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird auch eine *Metrik* genannt. Beweisen Sie, dass $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften (die sog. *metrischen Axiome*) erfüllt sind:

a) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

b) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),

c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

7. **Abschätzung der Fakultät [6 P]:** Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Abschätzung gilt:

$$n! \leq 2 \left(\frac{n}{2} \right)^n.$$

Tipp: Zeigen Sie – unter Verwendung der Bernoulli-Ungleichung – vorbereitend, dass

$$2\, n^n \leq (n + 1)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 29.04.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 3

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 06.05.-12.05.2013

---

8. Nullfolgen [3 P]: Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

9. Grenzwerte [1+1+2+2+1 P]: Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen:

a) $\left(\frac{14}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

b) $\left(\frac{6\,n^4+3\,n^2+2}{7\,n^4+12\,n^3+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

c) $\left(\sqrt[n]{b}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für $b\in\mathbb{R}$ mit $b>0$,

d) $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

e) $\left(\left(\frac{n+1}{\sqrt{n}}\right)^2-n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

10. *Sandwich*-Prinzip [5 P]: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen, deren Glieder die Ungleichungen

$$a_n \le b_n \le c_n \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

erfüllen. Beweisen Sie, dass aus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lambda \in \mathbb{R}$$

die Konvergenz von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lambda$ folgt.

11. Konvergenz und Grenzwert [5 P]: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge mit den Gliedern

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k}.$$

Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert und den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$ besitzt.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 06.05.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 4

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 13.05.-19.05.2013

---

12. Grenzwerte [5+3 P]:

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n > -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei k eine positive ganze Zahl. Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \sqrt[k]{1+a_n} - 1$$

eine Nullfolge ist.

b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge mit den Gliedern

$$a_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n,$$

wobei $q \in \mathbb{R}$ und $|q| < 1$. Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Folge, sofern er existiert.

13. Cauchy-Folgen [3 P]: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine relle Zahlenfolge, die

$$|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Treffen Sie damit eine Aussage über die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

14. Konvergenz einer Reihe [6 P]: Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

auf Konvergenz.

15. Wert einer Reihe [3 P]: Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 13.05.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 5

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 20.05.-26.05.2013

---

16. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert... [1+1+1 P]: Gegeben seien die zwei positiven reellen Zahlen

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1000}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{1000000}.$$

Bestimmen Sie für jede der nachstehenden Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürliche Zahlen n_1, n_2, so dass für alle $n \geq n_k$ jeweils $|a_n - 0| < \varepsilon_k$ gilt ($k \in \{1,2\}$):

a) $a_n = \dfrac{1}{n!}$, b) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, c) $a_n = \dfrac{1}{n^3+1}$.

17. Grenzwert vs. Häufungspunkt [2+2+2 P]: Bestimmen Sie die Grenzwerte bzw. Häufungspunkte der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen:

a) $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$,

b) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n} & \text{falls} \quad n = 3k,\ k \in \mathbb{N} \\ 2 + \frac{n+1}{n} & \text{falls} \quad n = 3k-1,\ k \in \mathbb{N} \\ 2 & \text{falls} \quad n = 3k-2,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$,

c) $a_n = n^2 q^n$ mit $q \in \mathbb{R}$, $0 < |q| < 1$.

18. Konvergenzkriterium [3 P]: Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz von $\sum a_k$ die Konvergenz von $\sum \dfrac{a_k}{\sqrt{k}}$ folgt.

19. (Absolute) Konvergenz [2+2+2+2 P]: Welche der folgenden Reihen konvergiert? Welche konvergiert absolut? Begründen Sie Ihre Aussagen.

a) $\sum \dfrac{k}{2^k}$, b) $\sum \dfrac{2^k+1}{3^k-4}$, c) $\sum (-1)^k \dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$, d) $\sum \dbinom{5k}{4k}^{-1}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 20.05.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 6

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 27.05.-02.06.2013

---

20. Fehlerabschätzung [3 P]: Der Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

ist die Eulersche Zahl e = 2.7182818285... . Ab welchen Indizes n wird der Fehler E_n, der bei der Berechnung mittels der Partialsumme begangen wird, d.h.

$$E_n = \left| \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right|,$$

kleiner als 1/2, 1/100 bzw. 1/10000?

21. Konvergenzkriterien [1+2+2+2 P]: Welche der folgenden Reihen konvergiert? Welche divergiert? Begründen Sie Ihre Aussagen.

a) $\sum \frac{1}{(2k)^l}$, $l \in \mathbb{N}$ fixiert, b) $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt[k]{k}}$, c) $\sum \frac{k^2}{2^k}$, d) $\sum \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$.

22. Cauchy-Produkt I [3+3 P]: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge mit den Gliedern

$$a_k = (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum a_k$ zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergent ist. Zeigen Sie weiterhin, dass das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst divergiert.

23. Cauchy-Produkt II [4 P]: Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{cases} 3 & \text{falls} \quad k = 0 \\ 3^k & \text{falls} \quad k \geq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \begin{cases} -2 & \text{falls} \quad k = 0 \\ 2^k & \text{falls} \quad k \geq 1 \end{cases}$$

sowie deren Cauchy-Produkt auf Konvergenz.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 27.05.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 7

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 03.06.-09.06.2013

---

24. Abzählbarkeit [4 P]: In der Vorlesung wurde Ihnen folgender Satz bewiesen:

$$\text{Ist } M_n \subseteq \mathbb{R} \text{ abzählbar für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ so ist } \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subseteq \mathbb{R} \text{ abzählbar.}$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieses Satzes, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist.

25. Offene/Abgeschlossene Mengen [3+3 P]: Beweisen Sie, dass der Durchschnitt endlich vieler offener Teilmengen von $\mathbb{R}$ offen ist. Zeigen Sie dann, anhand eines Beispiels, dass die Vereinigung einer Familie $\{\mathscr{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$ nicht abgeschlossen sein muss.

26. Häufungspunkte I [2+2 P]: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei nach oben beschränkte Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

a) $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$,

b) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

27. Häufungspunkte II [2+2+2 P]: Bestimmen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ für jede der nachstehenden reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $a_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$,

b) $a_n = \begin{cases} 11 + \frac{1}{2^n} & \text{falls} \quad n = 3k,\ k \in \mathbb{N} \\ 7 + \frac{n+1}{n} & \text{falls} \quad n = 3k-1,\ k \in \mathbb{N} \\ 4 & \text{falls} \quad n = 3k-2,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$,

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 03.06.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 8

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 10.06.-16.06.2013

---

28. Exponentialfunktion [3+3 P]: Beweisen Sie:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

29. Grenzwerte [2+2+3 P]: Bestimmen Sie die nachstehenden Grenzwerte, sofern diese existieren (Begründung):

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(2 + x\sqrt{1 + (4/x^2)}\right)$.

30. Stetigkeit [4 P]: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch die Zuordnung

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 4x + 3} & \text{falls } x \neq 1 \wedge x \neq 3 \\ \alpha & \text{falls } x = 1 \\ \beta & \text{falls } x = 3. \end{cases}$$

Können die reellen Zahlen α und β so gewählt werden, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist? Begründen Sie ihre Antwort.

31. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$... [1+1+1 P]: Gegeben sei die Funktion

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) := x^3 - x + 1 \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie reelle Zahlen $\delta > 0$, so dass für $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x - 2| < \delta$$

a) der Abstand $\left|f(x) - f(2)\right|$ kleiner ist als $\varepsilon = 1/10$.

b) der Abstand $\left|f(x) - f(2)\right|$ kleiner ist als $\varepsilon = 1/1000$.

c) der Abstand $\left|f(x) - f(2)\right|$ kleiner ist als $\varepsilon = 1/1000000$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 03.06.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Zusatzserie

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Wochen 10.06.-23.06.2013

---

1. **Vollständige Induktion [2* P]:** Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} k\,x^k = \frac{x}{x-1}\left(n\,x^n - \frac{x^n-1}{x-1}\right).$$

2. **Grenzwerte spezieller Folgen [1*+1*+2* P]:** Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$
Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Tatsache den Grenzwert für jede der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\geq k}$, sofern dieser existiert (Begründung):
   a) $a_n = \left(1+(3\,n)^{-1}\right)^n$, $k=1$.
   b) $a_n = \left(1-(n-2)^{-1}\right)^{n+5}$, $k=3$.
   c) $a_n = \left(3-n^{-1/2}\right)\left(1+3\,n^{-1}\right)^n\left(6+n^{-1000}\right)^{-1}\left(1+n^{-1}\right)^{-87}\left(1-n^{-1}\right)^{-n}$, $k=2$.

3. **Konvergenz einer Reihe [3* P]:** Es seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen, die
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0$$
erfüllen. Hiermit sei über
$$b_k := \lambda_1\,a_{k+1} + \lambda_2\,a_{k+2} + \ldots + \lambda_n\,a_{k+n} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$
die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen definiert. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum b_k$ konvergent ist und ihr Wert durch folgenden Ausdruck gegeben ist:
$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \lambda_1\,a_1 + (\lambda_1+\lambda_2)\,a_2 + \ldots + (\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1})\,a_{n-1}.$$

4. **Nullstellen [1*+1* P]:** Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ für jeden der nachstehenden Ausdrücke $f(x)$:
   a) $f(x) = \exp\left(x^2 - 2\sqrt{x^2}\right) - \frac{1}{\mathrm{e}}$, b) $f(x) = 1 + \sqrt{8\,x+1} - \sqrt{10\,x+6}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 10.06.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 9

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 17.06.-23.06.2013

---

32. Stetigkeit [2+2+2 P]: Bestimmen Sie die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

für jeden der nachstehenden Ausdrücke $f(x)$. Für welche $x_0 \in M$ ist die Funktion

$$\mathbb{R} \supseteq M \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

stetig in x_0? Begründen Sie Ihre Aussagen.

a) $f(x) = \left(\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3}\right)\left(x - 5\sqrt{x} + 6\right)^{-1}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$.

c) $f(x) = x - [x]$, wobei $[x] := z$, falls $z \le x < z+1$, $z \in \mathbb{Z}$.

33. Gleichmäßige Stetigkeit [2+2+2 P]: Untersuchen Sie jede der nachstehenden stetigen Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

a) $(1,\infty) \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$, b) $(0,1) \ni y \mapsto y^2 \in \mathbb{R}$, c) $(0,\infty) \ni z \mapsto z^2 \in \mathbb{R}$.

34. Umkehrfunktion [1+1+2 P]: Bestimmen Sie, sofern existent, die Umkehrfunktion von:

a) $[0,\infty) \ni s \mapsto \dfrac{\sqrt{s}-4}{\sqrt{s}+1} \in \mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R}\backslash\{-4\} \ni t \mapsto \dfrac{t-2}{t+4} \in \mathbb{R}$.

c) $\left(\dfrac{2}{3},\infty\right) \ni u \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{4u+3}{3u-2}}\right) \in \mathbb{R}$.

35. Allgemeine Potenz [1+1+1+1 P]: Seien a, b, x und y reelle Zahlen mit $a, b > 0$. Beweisen Sie:

a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, b) $\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$, c) $a^x \cdot b^x = (a\cdot b)^x$, d) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 17.06.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 10

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 24.06.-30.06.2013

---

36. Rechnen mit komplexen Zahlen [1+1+1+1 P]: Berechnen Sie

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1 \cdot \bar{z}_1, \quad z_1 \cdot \bar{z}_2, \quad z_2 \cdot \bar{z}_2$$

für die nachstehenden komplexen Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Stellen Sie die Resultate in der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

a) $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ und $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

b) $z_1 = 2 + 3\,\mathrm{i}$ und $z_2 = 3 - 5\,\mathrm{i}$.

c) $z_1 = 4 - 5\,\mathrm{i}$ und $z_2 = 4 + 5\,\mathrm{i}$.

d) $z_1 = \mathrm{i}$ und $z_2 = -2 - 4\,\mathrm{i}$.

37. Arithmetische Form komplexer Zahlen [1+2+2 P]: Bestimmen Sie die arithmetische Form der folgenden komplexen Zahlen:

a) $\dfrac{2}{1 - 3\,\mathrm{i}}$, b) $\dfrac{(2\,\mathrm{i} + 1)\,(\mathrm{i} - 2) + 1}{(2 - \mathrm{i})^2 - 2 + \mathrm{i}}$, c) $\left(3\,\mathrm{i} - \sqrt{3}\right)^4$.

38. Gleichungen mit komplexen Zahlen [1+2+2 P]: Bestimmen Sie alle Lösungen der nachstehenden Gleichungen. Berechnen Sie dabei jeweils Real- und Imaginärteil der Lösungen.

a) $z^3 = \mathrm{i}$, b) $z^2 = 3 - 4\,\mathrm{i}$, c) $|z| - z = 1 + 2\,\mathrm{i}$.

39. Gauß'sche Zahlenebene [2+2+2 P]: Beschreiben Sie die folgenden Mengen komplexer Zahlen als Punktmengen der Gauß'schen Zahlenebene (z.B. ist $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ die Peripherie des Kreises um $(0,0)$ mit Radius 1):

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 4\,\mathrm{i} - 3| \geq 3\}$.

b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| + \mathrm{Re}(z) = 1\}$.

c) $\left\{z \in \mathbb{C} : 5\,z \cdot \bar{z} + 18\,\mathrm{Im}(z) \leq 4\,\mathrm{Re}(z^2)\right\}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 24.06.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 11

Abgabe: in Gruppen von ≤ 2 Studenten in zugehöriger Übung der Woche 01.07.-07.07.2013

---

40. Folgen komplexer Zahlen [2+2+2 P]: Bestimmen Sie die Grenzwerte bzw. Häufungspunkte der nachstehenden Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen:

a) $c_n = 1 + \mathrm{i}^n$.

b) $c_n = \dfrac{1 + n^2\,(\mathrm{i} + 11\,n)}{1 - n^3\,\mathrm{i}}$.

c) $c_n = \dfrac{1}{n} \cdot \exp\left(\dfrac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,n}{n_0}\right)$ mit $n_0 \in \mathbb{N}$.

41. Teleskopreihe mit komplexen Gliedern [4 P]: Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{\left(1 - z^k\right)\left(1 - z^{k+1}\right)}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \neq 1$.

42. Additionstheoreme für Sinus und Cosinus [2+2 P]: Beweisen Sie, dass für beliebig gewählte $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Gleichungen gelten:

a) $\sin\left(x + y\right) = \sin\left(x\right)\cos\left(y\right) + \cos\left(x\right)\sin\left(y\right)$.

b) $\cos\left(x + y\right) = \cos\left(x\right)\cos\left(y\right) - \sin\left(x\right)\sin\left(y\right)$.

43. Grenzwerte trigonometrischer Funktionen [1*+2*+3* P]: Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern diese existieren (Hinweis: Die Regeln von de l'Hospital wurden in der Vorlesung noch nicht behandelt):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x \cdot \sin\left(1/x\right)\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan\left(3\,x\right)}{\sin\left(2\,x\right)}$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(1 + \exp\left(\cot\left(x\right)\right)\right)^{-1}$ und $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1 + \exp\left(\cot\left(x\right)\right)\right)^{-1}$.

⚠ Jede Aufgabe auf ein neues Blatt! Alle Blätter mit Name(n), Matr.-Nr. und Üb.-Gr. versehen! ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 01.07.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Serie 12

---

44. Trigonometrische und exponentielle Form: Bestimmen Sie den Betrag und das Argument für jede der nachstehenden komplexen Zahlen z. Geben Sie weiterhin z jeweils in trigonometrischer und exponentieller Form an.

a) $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, b) $z = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$, c) $z = (1-\mathrm{i})^{13}$.

45. Periodizität: Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $M \subseteq \mathbb{R}$ für jeden der nachstehenden Ausdrücke $f(x)$. Für welche dieser Ausdrücke ist die Funktion

$$\mathbb{R} \supseteq M \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

periodisch, d.h. für welche $f(x)$ existiert ein $p \in \mathbb{R}$ (eine sog. Periode), so dass

$$x + p \in M \wedge f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in M?$$

Bestimmen Sie, falls eine Periodizität vorliegt, die kleinste Periode $p_0 \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie weiterhin jeweils, ob die Funktion nach oben bzw. nach unten beschränkt ist.

a) $f(x) = -\exp(\cos(4x))$.
b) $f(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{\cosh(x)}$.
c) $f(x) = \cot^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + |\sin(x)|$.

46. Ableitung von Sinus und Cosinus: Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\sin'(x) = \cos(x)$, b) $\cos'(x) = -\sin(x)$.

47. Differenzierbarkeit: Untersuchen Sie, an welchen Stellen die folgenden Funktionen stetig, differenzierbar bzw. stetig differenzierbar sind:

a) $[0,\infty) \ni s \mapsto \sqrt{s} \in \mathbb{R}$.
b) $\mathbb{R}\backslash\{0\} \ni t \mapsto t^{-2} \cdot (2\sin(t) + \cos(t)) \in \mathbb{R}$.
c) $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$ mit $f(u) := \begin{cases} u \cdot \sin\left(\frac{1}{u}\right) & \text{falls } u \neq 0 \\ 0 & \text{falls } u = 0. \end{cases}$

Geben Sie weiterhin jeweils, wo existent, die Ableitung an.

⚠ Ohne Abgabe. Zur Bearbeitung in den Übungen. ⚠

HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Berlin, den 08.07.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I

Serie 13

---

48. Differenziation trigonometrischer Funktionen: In welchen Punkten ihres Definitionsbereichs sind die nachstehenden Funktionen differenzierbar (Begründung)? Bestimmen Sie dort jeweils ihre Ableitung.

a) $\cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}$, b) $\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$, c) $\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$.

49. Höhere Ableitungen: Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{N}$ die k-te Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto (a \cdot x + b)^l \in \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$.

b) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x \cdot f(x) \in \mathbb{R}$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, einer k-mal differenzierbaren Funktion.

c) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(-x) \cdot x^k \in \mathbb{R}$.

Geben Sie das Ergebnis von c) in der Form $k! \cdot \exp(-x) \cdot L_k(x)$ an. Die Funktionen $L_k(x)$ nennt man die *Laguerre'schen Polynome*.

50. Mittelwertsatz: Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (bzw. mit dem Satz von Rolle) beweise man:

a) Die Ableitung von $(x \cdot (x-1))^2$ besitzt wenigstens eine Nullstelle zwischen 0 und 1.

b) Es gilt
$$n \cdot x^{n-1} \geq \frac{x^n - y^n}{x - y} \geq n \cdot y^{n-1}$$
für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > y > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

c) Die Gleichung $x^n + p \cdot x + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ besitzt höchstens zwei reelle Lösungen für gerade n und höchstens drei reelle Lösungen für ungerade n.

51. Regel von de l'Hospital: Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$, b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\tan(2x)}$, c) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln\left(\frac{2 + 3\exp(x)}{5 + 7x}\right)$.

⚠ Ohne Abgabe. Zur Bearbeitung in den Übungen. ⚠